Dossiers rassemblés par Grothendieck sur différentes thématiques*

Algèbre universelle [ou catégories] : notes manuscrites (s.d.).
Cote n° 161-2, 111 pages

Alexander Grothendieck

[vers 1963-1973]†

*Les chemises ont été numérotées par Grothendieck de 1 à 6.
†Voir cote 135. Référence à SGA 4 (1963-1973).

2

Algèbre Universelle

1

2

Théorème Soient $d=(d',d'')$ un couple de [ensembles de] diagrammes,

C une catégorie petite

$\delta=(\delta';\delta'')$ un [petit] couple de cônes projectifs et inductifs dans C

$\Delta = \Delta_d = \Delta_{d',d''}$: la catégorie des catégories ayant des limites de type d, avec foncteurs y commutant

~~Alors il existe~~

Pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}(C,E)$ la sous-cat. pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,E)$ formée des foncteurs qui sont δ-exacts. Si [illegible] une [illegible] de $\delta(\delta',\delta'')$ et [illegible] $\in \Delta$, on définit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\delta}(C, E)$ comme intersection de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}$. Ceci posé, il existe une catégorie $\overline{C}_\delta \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, et un foncteur $i : C \to \overline{C}_\delta$, tel que

a) i soit δ-exact i.e. $i \in \underline{\mathrm{Hom}}_\delta(C,\overline{C}_\delta)$

b) il soit universel en le sens suivant : pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, le foncteur correspondant induit une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,i(\delta)}(\overline{C}_\delta, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\delta(C,E)$$

[i.e. $(\overline{C}_\delta, i)$ est objet initial de la catégorie des E [$\in \mathrm{Ob}\,\Delta$] sous C tels que $C \to E$ soit δ-exact]. De plus, $\overline{C}_\delta$ est petite.

NB Ce Pb redonne à la fois le Pb 1 ($\delta'=\delta''=\emptyset$) et le Pb 2 ($C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, ~~[illegible]~~ δ' = ~~diagrammes~~ [cônes proj. de type d'] exacts ~~[illegible]~~ et les diagrammes $(x \to y) \in E$, δ'' = ~~diagrammes~~ cônes inductifs de type d'' exacts). On verra que le th. permet aussi de traiter le cas des conditions d'exactitude.

Dém On construit par récurrence transfinie une suite transfinie de [petites] catégories C_i sous C, munies de $\delta_i = (\delta'_i,\delta''_i)$ (petit).

$$C \xrightarrow{\alpha_i} C_i \xrightarrow{T_i} C_{i+1}$$

$C_0 = C$, $\delta_0 = \delta = (\delta',\delta'')$,

~~C_{i+1}, δ_{i+1} déduit de $(C_i;\delta_i)$ ainsi :~~

$(C_{i+1},\delta_{i+1}) = K(C_i;\delta_i)$, K étant explicité ci-dessous

$C_i = \varinjlim_{j<i} C_j$ si i ordinal limite, $\delta'_i = \bigcup_{j<i} \delta'_j$ dans C_i, $\delta''_i = \bigcup_{j<i} \delta''_j$ dans C_i

3

Les propriétés essentielles de $K(C, \delta)$ ont résumées dans :

a) $\tau_i : C_i \to C_{i+1}$ est ~~précxacte pour~~ δ-préexact, i.e.

a') { a'_1) ~~Une double flèche~~ $z \rightrightarrows x$ Pour $(x \xleftarrow{p_\lambda} x_\lambda) \in d'_i$, et deux doubles flèches $z \overset{u, v}{\rightrightarrows} x$ telles que $p_\lambda \circ u = p_\lambda \circ v$ $\forall \lambda$, on a $\tau_i(u) = \tau_i(v)$

a'_2) Pour ~~tout~~ augmentation $(z \xrightarrow{q_\lambda} x_\lambda)$ du syst. proj., il existe $\tau_i(z) \xrightarrow{q} \tau_i(x)$ telle que $\tau_i(p_\lambda) \circ q = \tau_i(q_\lambda)$ $\forall \lambda$

a'') ~~dual~~ dual de a'), pour d''_i au lieu de d'_i

~~b) Tout diagramme d'_{i+1} de $\delta'_{i+1} \supset \tau_i(\delta_i)$~~

b) { b') $\forall$ diagramme Θ' de type d' dans C_i, $\exists$ une augmentation de $\tau_i(\Theta')$ qui est $\in \delta'_{i+1}$

(b'') $\forall$ diagramme Θ'' de type d'' dans C_i, $\exists$ une augmentation de $\tau_i(\Theta'')$ (dans δ''_{i+1})

c) { δ'_{i+1} = ~~$\tau_i(\delta'_i)$ ∪ diagrammes de type d'~~ ... ($\delta''_{i+1} = \tau_i(\delta''_i)$) ∪ diagrammes de type d''. ~~tout élément de δ'_{i+1} (δ''_{i+1}) de type Θ' ... $\notin d'$ ($\Theta'' \notin d''$) est dans $\tau_i(\delta'_i)$, ($\tau_i(\delta''_i)$)~~

d) $\forall$ catégorie $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, le foncteur $\varphi \mapsto \varphi \circ \tau_i$ induit une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_{i+1}}(C_{i+1}, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_i}(C_i, E)$$

La construction de $K_i(C, \delta) \to K(C, \delta)$ sera donnée plus bas. On ~~fait~~ va montrer comment elle permet de terminer.

~~De c) on conclut, par récurrence transfinie,~~

De d) on déduit par récurrence transfinie

(d*) $\boxed{\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_i}(C_i, E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}(C, E)}$ $\quad \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha_i$

ordinal?

Donc on a terminé si on montre qu'il existe ω tel que

{ 1°) $C_\omega \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ 2°) $\alpha_\omega : C \to C_\omega$ est δ-exact

3°) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_\omega}(C_\omega, E) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta, \tau_\omega(\delta)}(C_\omega, E)$

~~...~~

Soit pour ceci $\aleph$ un cardinal tel que

$\aleph >$ card Fl Θ, ~~...~~ si Θ $\in d'$ ou $\Theta \in d''$ ~~...~~ ou Θ indexe un $\in \delta'$ ou un $\in \delta''$

et ω le plus petit ordinal de cardinal $\geq \aleph$. Dans l'un S_ω des

de c) on conclut par récurrence transfinie

(C^*) { $\delta'_i = \alpha_i(\delta'_\omega) \cup$ ... $\delta''_i = \alpha_i(\delta''_\omega) \cup$ ...

4

$j < \omega$ est grand devant card $F\ell\,\Theta$, par ex. et Θ comme dessus.

On va établir d'abord le point suivant, plus fort que 2°:

(*) $\forall j < \omega$, $C_j \to C_\omega$ est δ_j-exact.

Cela résulte aisément de a), et c) (et grandeur de ω) / Détailler la démonstration

On ~~prouve aisément~~ en conclut 1°), utilisant (*) et b)

Pour prouver 3°, on note que b) et c) [et la grandeur de ω] impliquent

(**) $\delta_\omega =$ ~~[illegible]~~ (carrés exacts du type d' et d'') $\cup$ $\alpha_\omega(\delta)$.

Tout revient donc à construire $K(C,\delta)$, de façon à satisfaire a) à d)

On construit $(C,\delta) \mapsto K(C,\delta)$ comme composé $(C,\delta) \mapsto \rho(C,\delta)$ de une construction, dont chacune fait environ la moitié du boulot:

Dans chaque cas, on doit vérifier l'axiome 2 que c) et d) (qui sont vrais pour le composé)

$(C,\delta) \mapsto \rho(C,\delta)$ se fait en plusieurs étapes. On considère $\Delta^*(\phi, d'') = \Delta''$, $\Delta(d', \phi) = \Delta'$

$\rho_1(C,\delta) = (C_1, \delta_1)$, avec C_1 le Δ''-complété de C, $\tau_0 : C_0 \to C_1$

$\delta_1' = \tau_0(\delta')$, $\delta_1'' = \tau_0(\delta'') \cup$ (diagrammes du type d'' de C_1)

Cela assure b')

c) et d) vérifiés

$\rho_2(C_1, \delta_1) = (C_2, \delta_2)$, avec $\tau_1 : C_1 \to C_2$, C_2 déduit de C_1 en égalisant, tout couple de flèches $x \rightrightarrows x$ dans C_1, dont tout le [illegible] x d'un $(x \xrightarrow{p_\lambda} x_\lambda) \in \delta_1''$, satisfaisant $p_\lambda u = p_\lambda v$ pour tout λ. On pose $\delta_2 = \tau_1(\delta_1)$

Cela assure a_1'. c) et d) sont vérifiés.

$\rho_3(C_2, \delta_2) = (C_3, \delta_3)$, avec $\tau_2 : C_2 \to C_3$, C_3 déduit de C_2 en rajoutant, pour tout $\Theta'' = (x \xrightarrow{p_\lambda} x_\lambda) \in \delta_2''$ et toute augmentation $q = (z \xrightarrow{q_\lambda} x_\lambda)_\lambda$ du système projectif (x_λ), une flèche $u_{\Theta'',q}$ à C_3, satisfaisant $p_\lambda u_{\Theta'',q} = q_\lambda$ $\forall \lambda$.

$\delta_3 = \tau_2(\delta_2)$

Cela assure a_2'

c) et d) vérifiés

5

$\rho(C,\delta) = \rho_3\rho_2\rho_1(C,\delta)$

On définit de façon analogue une ~~opération~~ construction $\sigma = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$, assurant successivement b"), R"), a").

On pose $K(C,\delta) = \sigma\rho(C,\delta) = \sigma_3\sigma_2\sigma_1\rho_3\rho_2\rho_1(C,\delta)$. Il a les propriétés a) à d) voulues.

NB L'ordre dans lequel on a composé les 6 opérations σ_i, ~~et les~~ ρ_i n'a pas d'importance. On pourrait prendre p. ex

$$K'(C,\delta) = \sigma_1\rho_3\sigma_2\rho_1\rho_2\sigma_3(C,\delta) \quad !$$

La chose ayant une signification intrinsèque est la limite des itérés transformés de K....

Condition d'exactitude.

On se donne des petites catégories de Δ-foncteurs entre triangulées dans $\Delta = \Delta_d = \Delta_{d', d''}$,

(petits) $f^{(i)}_\lambda : R^{(i)}_\lambda \to R'^{(i)}_\lambda$ $(i=0,1,2)$ pour $f^i = (f^i_\lambda)$, $f = (f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)})$

Δ_f est la sous-2-catégorie 2-pleine de Δ formée des $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ tels que, ~~le foncteur $\varphi \mapsto \varphi\, f$~~ pour tout $\varphi : R \to R'$ dans Δ, le foncteur induit $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R', E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, E)$. (les foncteurs entre E sont les foncteurs d'exacts)

a) soit fidèle si φ est f^0_λ

b) ~~soit~~ pl. fidèle ~~...~~ f^1_λ

c) .. 2-fid. — — — f^2_λ

Théorème Soit (C,δ) comme dans le th. Avec les notations précédentes. Alors on peut trouver un foncteur exact $C \to \overline{C}$, avec $\overline{C} \in \mathrm{Ob}\,\Delta_f$, et qui soit 2-universel pour ces propriétés. De plus, $\overline{C}$ est ass. petite.

[Cela résoud en particulier les Pb 1 et Pb 2 et Pb 2' (pour Δ_f]

6

~~On peut faire la construction de $K(C,\delta)$ en trois étapes~~
~~$K(C,\delta) = \dots(C,\delta)$, avec une construction transfinie comme précédemment, en imposant des conditions $g(e)$ aux conditions a) b) c) d)~~
~~e) e₀) Si $R \xrightarrow{\varphi} R'$ ... f_λ^i, et $u,v : R' \rightrightarrows C_i$.~~

Utilisant le th. précédent, on peut supposer que $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, et δ formé des ~~diagrammes~~ (δ'') $(i-1)$ ... du type $d'(d'')$, de sorte que
$$\mathrm{Hom}_\delta(C,E) = \mathrm{Hom}_{\delta,\delta}(C,E) \quad \forall E \in \mathrm{Ob}\,\Delta .$$
On va faire une construction transfinie (C_i,δ_i), $C_i \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ petite, foncteurs de transition dans Δ,
$$\begin{cases} (C_0,\delta_0) = (C,\delta) \\ (C_{i+1},\delta_{i+1}) = K(C_i,\delta_i),\ \tau_i : C_i \to C_{i+1},\ \delta_{i+1} = \tau_i(\delta_i) \\ C_i = \varinjlim_{j<i}{}^{(\Delta)} C_j \text{ si } i \text{ ordinal limite},\ \delta_i = \bigcup_{j<i} \text{Images des } \delta_j \text{ dans } C_i . \end{cases}$$

On construit $(C,\delta) \mapsto K(C,\delta)$ de façon à satisfaire les conditions suivantes

a) a0) Pour tout foncteur $R \xrightarrow{\varphi} R'$ parmi les $f_\lambda^{(i)\,(i+1,2)}$, et pour tout couple de Δ-foncteurs $u',v' : R' \rightrightarrows C_i$, et une double flèche $\lambda,\mu : u' \to v'$, si $\lambda * \varphi = \mu * \varphi$, alors $\tau_i(\lambda) = \tau_i(\mu)$

a1) Pour tout ~~..~~ $\varphi : R \to R'$ parmi les f_λ^1 et f_λ^2, et tout couple de Δ-foncteurs $u',v' : R' \to C_i$, et $\lambda' : u'\varphi \to v'\varphi$, considérant $\tau_i u' \xrightarrow{\tau_i * \lambda'} \tau_i v'$,
$$\Big(R' \underset{\tau_i v'\varphi}{\overset{\tau_i u'\varphi}{\rightrightarrows}} C_{i+1} \Big)$$
$\exists\ \tilde\lambda : \tau_i u' \to \tau_i v'$ tel que $\tau_i * \lambda' = \tilde\lambda * \varphi$

a2) Pour tout $\varphi : R \to R'$ parmi les f_λ^2, et tout Δ-foncteur $u : R \to C_i$, soit $\tau_i u : R \to C_{i+1}$, $\exists$ un Δ-foncteur $u' : R' \to C_{i+1}$ et un isom
$$\tau_i u \simeq u'\varphi$$

7

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

b) T_i est δ_i-exact

c) Pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta_f$, la fonction $\varphi \mapsto \varphi\circ\tau_i$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(C_{i+1},E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(C_i,E)$ induit une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\delta_{i+1}}(C_{i+1},E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\delta_i}(C_i;E).$$

~~On pose~~

De c), on déduit par récurrence transfinie, pour $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta_f$

(c*) $$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\delta_i}(C_i,E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\delta}(C,E)$$

et de la définition des δ_i, on déduit par réc. transfinie

$$\delta_i = \alpha_i(\delta) \qquad (\alpha_i : C \to C_i)$$

Donc tout revient à prouver que l'on peut trouver un (petit) ordinal ω tel que $C_\omega \in \mathrm{Ob}\,\Delta_f$ et $C \to C_\omega$ est δ-exact. (Pour ceci, soit π un cardinal majorant strictement $\mathrm{Fl}\,R$ et $\mathrm{Fl}\,R'$, ~~Fl Θ~~ pour les R, R' qui interviennent dans f, ainsi que les $\mathrm{Fl}\,\Theta$ qui interviennent dans δ... ; soit ω le plus petit ordinal de cardinal π. On tire que $\mathfrak{S}_\omega$ en $j<\omega$ est grand devant $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,R$, $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}\,R'$, $\mathrm{Fl}\,\Theta$.

Mais on voit que $C \to C_\omega$ est δ-exact en utilisant b) et le fait que S_ω grand devant les card $\mathrm{Fl}\,\Theta$. Et on voit que pour $\varphi : R \to R'$, $\underline{\mathrm{Hom}}(R',C_\omega) \to \underline{\mathrm{Hom}}(R,C_\omega)$ est surj. fidèle ($\varphi \in f_i$ avec $i=0,1,2$) resp. pl. fidèle ($i=1,2$) ou équivalence ($i=2$), en utilisant respectivement a_0, a_1, a_2 plus le fait que $\mathfrak{S}_\omega$ est grand devant card $\mathrm{Fl}\,R$ et card $\mathrm{Fl}\,R'$.

dégager les lemmes un peu synt. indépendants des catégories (qui serviraient dans les 2 théorèmes...)

8

Je viens donc à faire la construction de $K(C,\delta)$

<u>Conditions d'exactitude</u>

1) Sur une catégorie C.

Exemple type : existence de $X \times Y$?

a) Existence inconditionnelle de certaines $\varprojlim$ ou $\varinjlim$ dans C, correspondant à certains types de diagrammes $d = (d', d'')$.

existence d'objet final

b) Existence conditionnelle de types de $\varprojlim$ ou $\varinjlim$. On se donne ~~un~~ diagramme Θ, et ~~des~~ un système de diagrammes dans Θ $\Theta'_i \xrightarrow{u'_i} \Theta$, $\Theta''_j \xrightarrow{u''_j} \Theta$, et on demande que pour tout $\Theta \to C$ (satisfaisant éventuellement des conditions supplémentaires de commutativité de certains diagrammes déduits de Θ — cela se ramène à demander que Θ soit une catégorie et $\Theta \to C$ un foncteur [étudier des conditions "d'exactitude" plus subtiles, cf plus bas conditions d'ex. des foncteurs] les $\varprojlim$ ($\varinjlim$) des diagrammes correspondants de type Θ'_i (Θ''_j) existent dans C.

existence de $X \times_Y X$

c) Exactitude de cônes projectifs et inductifs. On se donne une ~~diagramme~~ catégorie Θ, munie de familles $\underbrace{\Gamma', \lambda'}_{c.p.}, \underbrace{\Gamma'', \lambda''}_{c.i.}$ de cônes projectifs et inductifs, et on demande que tout foncteur $\Gamma = (\Gamma', \Gamma'')$ — exact soit $\lambda = (\lambda', \lambda'')$ — exact. [i.e. tout foncteur $\Theta \to C$ ~~…~~ un certain type d'exactitude en implique un autre]

sommes amalgamées universelles, exactitude des cônes

tout morphisme … (cf. …)

d) On se donne ~~une catégorie~~ foncteur $\Theta \to \bar\Theta$ entre catégories et dans Θ un système $\Gamma = (\Gamma', \Gamma'')$, dans $\bar\Theta$ un système $\bar\Gamma = (\bar\Gamma', \bar\Gamma'')$. On considère alors

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(\bar\Theta, C) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\Theta, C) \\ \cup & & \cup \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\bar\Gamma}(\bar\Theta, C) & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\Gamma}(\Theta, C) \end{array}$$

10

et on peut demander des conditions du type suivant

(ii) φ^*_C envoie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$: (en particulier de C), et permet d'exprimer C)

(i) la restriction de φ^*_C : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ est fidèle (en particulier de C)

(ii) la restriction de φ^*_C : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ est ~~...~~ surjectif sur les Hom

(ii') $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ est dans l'image essentielle de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$

NB (i) ~~et (ii)~~ sont dans le critère d'une condition d'existence de flèches (ou injections de flèches) dans C, tandis (ii') dans le critère d'existence d'objets et de diagrammes d'objets. Ainsi, (ii') généralise a) et b) [~~(ii) ...~~ des conditions du type (ii') peuvent-elles s'exprimer comme conditions du type (ii) ?]

?!

Deux finalement on revient : ~~deux~~ types de conditions permettent d'exprimer les autres

1°) $\mathrm{Im}(\varphi^*_C|\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}) \subset \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ — implique conditions d'exactitude initiales

2°) $\mathrm{Im\,ess}(\varphi^*_C|\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}) \supset \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ — implique conditions (existence (y compris conditionnelle)) de limites

Vérifier que cela permet bien d'exprimer l'injectivité resp. surjectivité de $\varphi^*_C|\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta}$ sur les Hom ....

2°) Conditions d'exactitude sur foncteurs $f: C \to C'$

On a déjà vu comment on peut en exprimer, avec des v. quels de ~~diagrammes~~ cônes de C. Mais une condition d'exactitude pour lt C, sans données supplémentaires sur C, ~~...~~ en façon suivante : lt C des v. quels de ~~diagrammes~~ cônes de C. Une façon de le faire est de partir de Θ, muni de $\delta\xi = (\delta', \delta'')$ et $\lambda = (\lambda', \lambda'')$, (v. quels de cônes) et de prendre les $u : \Theta \to C$ qui sont δ-exacts, et demander que F soit $u(\lambda)$-exact pour lt tel u. On peut prendre une famille de $C(\Theta_\alpha, \delta_\alpha, \lambda_\alpha) = T_\alpha$, d'où $T = (T_\alpha)$

On dira que la T-exactitude est propriété

11

Vers composition ~~entre~~ de foncteurs entre catégories satisfaisant aux ens. conditions données de conditions d'exactitude. Pour ceci, il est ~~bien~~ naturel d'exiger que

$$C \xrightarrow{F} C' \xrightarrow{G} C''$$ ~~les foncteurs~~ $\lambda' \supset \delta'$, $\lambda'' \supset \delta''$.

$$\begin{tikzcd} & C \\ & \Theta \arrow[u, "u"] & J' \arrow[l, "\eta'"'] \\ I' \arrow[ur, "\xi'"] & I'' \arrow[u, "\xi''"'] & J'' \arrow[ul, "\eta''"] \end{tikzcd}$$

$(\in \lambda = (\lambda', \lambda''))$

$(\in \delta = (\delta', \delta''))$

Si on veut que les foncteurs identiques satisfassent les conditions, il est naturel d'exiger qu'on se borne aux C qui satisfont la condition d'exactitude pour $\forall\ \Theta \to C$ δ exact est λ exact. Mais alors la condition ~~sur~~ F devient pour $\forall\ \Theta \xrightarrow{u} C$ λ-exact, $F \circ u$ est λ-exact.

~~On a ainsi donné des ingrédients à définir~~

~~1°) un ens Σ_0 de parties Δ_0 de $Ob(Cat)$, chacune stable par équivalence de catégories (si $C \in \Delta_0$, et $C' \in Ob\,Cat$, $C' \simeq C$, alors $C' \in \Delta_0$); Σ est stable par intersection.~~

~~2°) Un ens Σ_1 de parties Δ_1 de $Fl(Cat)$, chaque Δ_1 stable par isom (si $u, v : C \rightrightarrows C'$, et $u \simeq v$, alors $u \in \Delta_1 \Rightarrow v \in \Delta_1$) contenant les ~~identités~~ équivalences et par composition~~

(1) Donnée d'un ~~groupe~~ ρ / ~~de~~ catégories Θ, avec $\lambda = (\lambda', \lambda'')$. ~~Ainsi~~ ρ désigne ~~un~~ l'un des couples (Θ, λ)

~~$\Delta_\rho \subset (Cat)$: les catégories qui~~

$\Sigma_\rho \subset Fl(Cat)$: un foncteur $F : C \to C'$ est ρ-exact si pour ~~tout foncteur~~ (Θ, λ) de ρ et $\forall\ u : \Theta \to C$ qui est λ-exact, $F \circ u$ est λ-exact.

Alors a) Σ_ρ est stable par isom (i.e. si $F, G : C \to C'$, ~~et~~ $F \in \Sigma_\rho \Rightarrow G \in \Sigma_\rho$)

b) Σ_ρ contient les équivalences de catégories

c) Σ_ρ stable par composition

d) Une intersection de parties Σ_ρ de $Fl\,Cat$ est de ce type.

(2) Donnée d'un ~~ens~~ ~~groupe~~ couple σ de (σ_1, σ_2) de p. graphes de foncteurs $R \xrightarrow{\varphi} \bar{R}$, avec ~~$\varphi$~~ R muni de $\delta = (\delta', \delta'')$, $\bar{R}$ de $\bar{\delta} = (\bar{\delta}', \bar{\delta}'')$, ~~et une catégorie~~ ... on définit $\Delta_\sigma \subset Ob\,Cat$ par

12

$C \in \Delta_\sigma$ ssi

a) si φ $(R, \delta ; \bar{R}, \bar{\delta}, \varphi : R \to \bar{R}) \in \sigma_1$, alors

$$\mathrm{Im}\ldots(\varphi^*_C \mid \underline{\mathrm{Hom}}_{\bar{\delta}}(\bar{R}, C)) \subset \underline{\mathrm{Hom}}_\delta(R, C)$$

b) si (-) $\in \sigma_2$, alors ... l'inclusion ... $\supset$.

a) Δ_σ stable par équivalence de catégories

b) Une intersection de ~~catégories~~ sous-catégories de la forme Δ_σ est de la même forme.

(3) $\Delta_{\sigma,\rho}$ est la sous-2-catégorie de Cat dont les objets sont les éléments de Δ_σ, et les foncteurs entre objets les foncteurs $\in \Sigma_\rho$.

a) Ob $\Delta_{\sigma,\rho}$ stable par équivalence

b) si $C, C' \in$ Ob $\Delta_{\sigma,\rho}$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_{\sigma,\rho}}(C, C')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{Cat}(C, C')$ est une sous-catégorie pleine ~~...~~

c (La composition des foncteurs dans $\Delta_{\sigma,\rho}$ induite par celle de Cat)

c) Toute intersection de catégories de la forme $\Delta_{\sigma,\rho}$ est du même type.

sous-2-catégorie Δ "distinguées" (prononcer...) si a) les (R, δ) et $(\bar{R}, \bar{\delta})$ ... $\in \rho$ ... tels que $(S, \lambda) \in \rho$, alors les Δ sont ... b) si $(S, \lambda) \in \rho$, ... λ-limite existe dans ... (car $\bar{\delta} = \varphi_!(\bar{R})$ ...) pour les ~~...~~ Σ, ... φ ... et foncteurs Σ ... des limites.

Remarque Soient $\Delta \subset \Delta'$ de la forme $\Delta_{\sigma,\rho}$ et $\Delta_{\sigma';\rho'}$. Soit $R \xrightarrow{\varphi} \bar{R}$ dans Δ', et considérons, pour $C \in$ Ob Δ, l'homomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta'}(\bar{R}, C) \xrightarrow{\varphi^*_{R,C} = \psi} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta'}(R, C)$$

Considérons l'une des conditions suivantes (pour C variable dans Ob Δ)

a) ψ est fidèle

b) ψ est surjectif sur les Hom

c) ψ est ... surjectif sur objets

conjonction : φ pl. fidèle

conjonction : ψ est une équivalence.

Soit $\Delta_0 \subset \Delta$ la sous-2-catégorie 1-pleine définie par l'une des trois conditions précédentes. Alors Δ_0 ~~...~~ distinguée ?

Soit ~~...~~ $\delta(\bar{\delta})$ l'une des ~~diagrammes~~ cônes existants dans $R(\bar{R})$ qui sont images des ~~...~~ cônes ... Θ par $\Theta \to R$ $(\Theta \to \bar{R})$ λ existe ~~distincts des conditions dans~~ $(\Theta, \lambda) \in \rho'$. Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta'}(\bar{R}, C) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\bar{\delta}}(\bar{R}, C)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta'}(R, C) = \underline{\mathrm{Hom}}_\delta(R, C)$

13

(a) $\mathbb{D}=(D',D'')$ couple de ~~[illegible]~~ catégories

(b) $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$, $\sigma_i\,(i=1,2)$ couples de quadruplets $(R,\bar{\bar\delta},\bar R,\bar{\bar\delta},\varphi: R\to\bar R)$, $R,\bar R$ cat, φ foncteur

i.e. $\delta=(\delta',\delta'')$ paire de cônes pr. [illegible] des $\frac{R}{\bar R}$ de types $\in D$

$\bar\sigma=(\bar\delta',\bar\delta'')$

~~(c) [illegible] (S,λ), avec S cat, $\lambda=(\lambda',\lambda'')$ couple de cônes [illegible] de S de type $\in D$, [illegible] β [illegible] (R,δ) et $(\bar R,\bar\delta)$ provenant de σ.~~

14

On traduit ces conditions disant facilement de la suivante : Tt diagramme δ de type $\Theta \in d''$ dans D provenant d'un diagramme δ_j dans un des G $G(i)$, et que l'ens. d'indices des $j \in i$ n'est grand devant card $Fl\,\Theta$: on veut dire que la $\varinjlim$ des δ_j dans G donne une limite dans D [car les $\varprojlim$ de type Θ commutent aux $\varinjlim$ grandes devant card$(Fl\,\Theta)$].

b) $\alpha_i : C \to C_i$ envoie δ'-exact, i.e. si $(x \xrightarrow{v_\lambda} x_\lambda)$ est dans δ', alors $(\alpha_i(x) \xrightarrow{\alpha_i(v_\lambda)} \alpha_i(x_\lambda))$ est un cône proj. ex.-a.

relevance Or cela résulte aussitôt de la description des flèches de $\varinjlim_{i \in I(\mathrm{cat})} C_i$, de a) et b), et du fait que $I' = \{j \mid j \in i\}$ est grand devant card $Fl\,\Theta$ — de sorte que les images des flèches $z \to \alpha_i(x_\lambda)$ provenant d'un syst. cohérent dans un G, $j \in i$ (satisfaisant les compatibilités adéquates) et les deux flèches $u, v : z \to \alpha_i(x)$ provenant d'une seule flèche analogue dans un G, l'égalité $\alpha_i(p_\lambda)u = \alpha_i(q_\lambda)v$ pour tt λ étant déjà vérifiée.

Cela achève la démonstration.

Ceci résoud à la fois le pb 1 et le pb 2

<u>Th</u> Soient d', d'' des petits ensembles de diagrammes, ~~et~~ munis d'un ens (δ', δ'') de cônes projectifs et inductifs, $\Delta = \Delta(d', d'')$, C une petite catégorie. Alors ~~il~~ il existe une Δ-enveloppe de (C, δ', δ'') ~~et celle-ci est encore petite~~, i.e. un foncteur $i : C \to C'$ avec $C' \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $i\,(\delta', \delta'')$ exact, et universel vis à vis des propriétés [i.e. $\forall E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, i induit une équivalence ~~$\mathrm{Hom}_{\Delta,(\delta',\delta'')}(C$~~ $\mathrm{Hom}_{\Delta,(i(\delta'), i(\delta''))}(C', E) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\Delta,(\delta', \delta'')}(C, E)$.

~~Soit~~ Soit ρ le foncteur $\Delta(\phi, d'')$-enveloppe,
σ — $\Delta(d', \phi)$-enveloppe.

On construit une suite transfinie de catégories C_i sous C, chacune munie d'un ens $\delta_i = (\delta_i', \delta_i'')$ de cônes proj. et inductifs. On pose
$C_0 = C$, ~~$d_0' \ldots$~~ $(\delta_0', \delta_0'') = (\delta', \delta'')$
(C_{i+1}, δ_{i+1}) déduit de (C_i, δ_i) ainsi :

15

16

Δ = Bandotopos (conditions a) b) c) de Giraud) foncteurs commutant aux lim, et exacts, à g.

Topos et structures algébriques

1) Topos et structures algébriques définissables par lim finies.

Δ_0 = cat. avec lim finies

T_0 th. algébrique sur $/\Delta_0$, représentée par une petite $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta_0$

$$T_0(E) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_0}(C, E) \quad \text{si } E \in \mathrm{Ob}\,\Delta_0$$

Si $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, on sait que

$$T_0(E) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_0}(C, E) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(\hat{C}, E) \; [\cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{top}}(E, \hat{C})^{\circ} \text{ si } E \text{ un topos}]$$

Ainsi le topos $\hat{C}$ est ~~...~~ le topos $\Delta_0 - \Delta$ enveloppe de C.

2) Δ- Enveloppe d'une petite catégorie I (Pb. 1)

On prend la Δ_0-enveloppe $\mathcal{G}_{\Delta_0}(I) \subset \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathrm{Ens})^{\circ}$ (sous-cat. pleine des foncteurs "de présentation finie" — sous-catégorie pleine engendrée par I via lim finies — on peut la former en deux crans, en ajoutant les lim finies des diagrammes dans I, puis prenant facteurs directs....

puis on prend la $\Delta_0 - \Delta$-enveloppe de $\mathcal{G}_{\Delta_0}(I)$, savoir $\widehat{\mathcal{G}_{\Delta_0}(I)}$.

3) Sous-théorie d'une Δ-théorie (représentables par des topos) — et sous-topos (Pb. 2)

Soit R un topos, Σ un ensemble de flèches en R.

On considère

$$E \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_{\Sigma}}(R, E) \qquad E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$$

On sature Σ par ST1, ST2, ST3 (SGA 4 I 9.1.? c)), d'où Σ' et on trouve $R\Sigma'^{-1}$, qui est un topos R', et on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta, \Sigma}(R, E) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(R', E)$$

On sait que R' est un sous-topos de R, et tout sous-topos de R s'obtient ainsi (loc. cit). Si $R \simeq \tilde{C}$, C petit site,

ST1 Si $w = uv$, composée de flèches de Σ, ... dans Σ, ... transitivité. Carrés cartésiens
ST2 Stabilité par changement de base (cartésien par lim finies)
ST3 Nature locale ($\Longleftrightarrow$ stabilité par lim)

17

ils correspondant aux topologies T'/sur C plus fines que la top. donnée, par $R' \longleftrightarrow (C,T')$.

Remarquons que si on a un sous topos donné R', on peut toujours le décrire à l'aide d'un petit ens. $\Sigma \subset Fl\,R$. En effet, soit $C \subset R$ petite génératrice. Alors les flèches $\in \Delta$

$R \to \bar{R}$ qui se factorisent par R' sont celles qui transforment familles ~~couvrantes~~ $S_i \to S$ dans C couvrantes pour la topologie T' définissant R' en familles couvrantes [i.e. unions telles que pour $\forall S \in Ob\,\bar{R}$ et $S' \hookrightarrow S$ monomorphisme de $\bar{R}$, $S' \to S$ est transformé en mono].

Conséquence Supposons R "algébrique" i.e. T_R théorie algébrique; alors $T_{R'} \subset T_R$ (ss-théorie "pleine") est algébrique, se déduit de $T_{R'}$ par un petit ensemble d'axiomes.

D'ailleurs, si on a deux théories représentables $T_R, T_{R'}$ (R, R' des topos) et un foncteur $T_{R'} \to T_R$ qui est un plongement de théories, i.e. tel que $T_{R'}(E) \to T_R(E)$ pl. fid. pour $\forall E \in Ob\,\Delta$, cela provient d'une flèche correspondante $R \to R'$ de Δ qui est telle que $\forall E \in Ob\,\Delta$, $\underline{Hom}_\Delta(R', E) \to \underline{Hom}_\Delta(R, E)$ est pl. fidèle. Or on caractérise les morphismes de topos $R' \to R$ qui sont des plongements.

4) Théorème Un $R \in Ob\,\Delta$ est algébrique, i.e. représente une théorie algébrique, ssi R est un topos, i.e. admet une petite sous-catégorie génératrice. b) Soit I une cat discrète, $R \in Ob\,\Delta$, $I \xrightarrow{b} R$ un foncteur. Alors* b est basique (i.e. ...) ~~ssi~~ $b(I)$ est génératrice ssi les sous-catégories pleines de R engendrées par produits finis d'objets en $b(S)$ est strictement génératrice.

Dém Évidemment b) $\Longrightarrow$ a, donc prouvons b).

Suffisance On va construire la théorie alg. basique représentée par R, b en prenant pas.

18

19

1°) ~~Théorie~~ Structure vide sur objets de base $(X_i)_{i\in I}$. Représentable par un type $R_0 = (\text{Pb } 1$; on a R_0 = ens. I-multisimpliciaux $= \widehat{\mathbb{J}}_0$, $\mathbb{J}_0$ = catégorie des familles d'ensembles finis $(E_i)_{i\in J}$ presque tous vides) où $I \to \mathbb{J}_0 \to R_0 \to R$ [illegible] générateurs dans R.

J = catégorie [illegible] par I

2°) On rajoute des flèches ~~[illegible]~~ entre objets de R_0 provenant de $\mathbb{J}_0$ (celles de R), d'où R_1 ~~[illegible]~~ ($\mathbb{J}_1$ et $R_1 = \rho_\Delta(\mathbb{J}_1)$)

3°) on met des axiomes d'exactitude sur des cônes (en vertu de R) d'où $\mathbb{J} \to R_0 \to R_1 \to R_2 \to R$

$$T_{R_1}(E) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(R_1, E) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{J}_1, R) \longleftrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, E) = T_R(E)$$

où $\mathbb{J}_1$ est la sous-catégorie pleine de R définie par $\mathbb{J} \to R$, donc R_2 est le [illegible] de la petite catégorie $\mathbb{J}_1$ (cf Pb 1)

Maintenant ~~l'[illegible]~~ le foncteur $T_R \to T_{R_2}$ est pl. fidèle, on sait donc que la [illegible] que [illegible] fini [illegible]

4°) On met d'autres axiomes ~~[illegible]~~ sur la structure. [On peut expliciter lesquels : a) foncteurs [illegible] $I_1 \to E$, i.e. ~~[illegible]~~ qui (aux cx. de [illegible] R) transforment certains ~~[illegible]~~ cônes [illegible] de I_1 ~~[illegible]~~ en cônes exacts de E ; ~~b) foncteurs~~ en [illegible] les foncteurs qui se prolongent en des foncteurs [illegible] aux [illegible] $R \to E$, plus la condition de transformer certains ~~[illegible]~~ cônes projectifs finis de E ([illegible], de R_2', le type classifiant pour ce système d'axiomes) en cônes exacts ..... La [illegible] $I - R_0 - R_1 - R_2 - R_3 \simeq R$

NB Comme on a rajouté dans 3° et 4° des axiomes, on peut les condenser en un seul pas, grâce au fait que $R_1 \to R_2$ est surjectif sur objets et flèches (cf. Pb 2). Donc on peut tout faire par les trois pas minimum : objets, rajouter flèches, axiomes sur les flèches (exprimables en termes ~~[illegible]~~ d'inscriptions de flèches entre [illegible] de ~~[illegible]~~ foncteurs [illegible]) ~~[illegible]~~ ou [illegible] entre tels foncteurs qui aux flèches [illegible] dans les données.

NB $\widehat{\mathbb{J}}_1 \to R$ est un foncteur de localisation

[illegible] $\rho(\mathbb{J}_0) = \rho(\mathbb{J}_1)$ [illegible]

$\rho(I) \simeq R_0 \hookrightarrow R^0 \to H$

$\rho(\mathbb{J}_2)$

$R_2 \to R_3 = R$

~~[illegible]~~

<u>Re NB</u> Si on veut seulement montrer que tout topos R est "algébrique" c'est encore plus court : on choisit C petite avec lim finies, telle que $R \simeq \tilde{C}$, et ~~on écrit que~~ part de la structure algébrique $T_C^{\Delta_0}$ — sa restriction à Δ est donc algébrique, elle est représentée par $\hat{C}$, cf n=1 — puis on rajoute des axiomes exprimant la continuité d'un foncteur $C \to E$ (commutant déjà aux lim finies) par le fait de transformer familles couvrantes en familles couvrantes....
~~[illegible]~~

~~Résumé~~ : Il faut revoir par : par la construction transfinie

a) Structure riche sur un ens de base I/ Représentée par $\hat{\tilde{I}}$ (cf Pb 1), où $\tilde{I} = \rho_{\Delta_0}(I)$.
~~I engendre Δ-engendre~~ NB I Δ-engendre $\hat{\tilde{I}}$ — on peut pas se rapporter aux produits, puis aux lim quel.

b) ~~Re~~ Mettre axiomes sur théorie algébrique T_R, R un topos. Cela relève du Pb 2 traité. On trouve R' et $R \to R'$ non-surjectif (et aussi surjectif sur les Hom).

c) Rapporter flèches (petit ensemble H/) : ~~R~~. théorie algébrique T_R, R déjà topos. ~~Soit C l'ens des~~ Soit ~~C ⊂ R la petite sous-catég~~ ~~I~~ $c \otimes R$ l'ens des sources et buts des flèches, C la catégorie libre engendrée, par ~~l'ens~~ J comme objets et les flèches H, $\rho_\Delta(C)$ la catégorie correspondante, alors la théorie T' est le produit 2-fibré $T' \simeq T_R^2 \times_{T_I} T_C$ ~~[illegible]~~
où $T_C(E) \simeq \underline{Hom}_{Cat}(C, E)$, et $T_J(E)$ se définit de même, J considéré comme catégorie discrète. Or (Pb1) $T_C \simeq T_{R_1}$, $T_I \simeq T_S$
20 R_1 et S deux topos, donc il faut prouver l'existence

du produit 2-fibré dans $T_{(p)}$ [de $R \overset{2}{\times}_S R_1$], le 2-topos amalgamé dans Δ $R \amalg_S R_1$. Cette construction m'est connue, redonnons en une autre, dans le cas général $R \overset{2}{\times} S$, avec les foncteurs image inverse $T \overset{f^*}{\underset{g^*}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} R \\ S \end{matrix}$. On choisit des petites sous-catégories ~~génératrices~~ génératrices T_0, R_0, S_0 telles que $f^*(T_0) \subset R_0$, $g^*(T_0) \subset S_0$. On prend U_0 la catégorie 2-somme amalgamée de R et S, de sorte que pour toute catégorie (E ~~...~~ ...

$$\underline{Hom}(U_0, E) \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}(R_0, E) \overset{2}{\times}_{\underline{Hom}(T_0,E)} \underline{Hom}(S_0, E)$$

Il faut, si $E \in Ob\, \Delta$, exprimer qu'un objet du ~~second membre~~ premier membre, $U_0 \xrightarrow{h} E$, est dans ~~...~~ la sous-catégorie pleine $\underline{Hom}_\Delta(R,E) \overset{2}{\times}_{\underline{Hom}_\Delta(T,E)} \underline{Hom}_\Delta(S,E)$ du deuxième membre. Si on a pris R_0, S_0 stables par lim finies, cela s'exprime aisément par la ~~commutativité~~ ~~des conditions aux~~ condition que h transforme certains cônes projectifs finis de U_0 (provenant des cônes exacts de R_0 et de S_0) en cônes exacts, et ~~que h~~ qu'elle transforme certaines familles (provenant des familles couvrantes de R_0 et S_0) en familles couvrantes. Donc on obtient la théorie cherchée $\mathcal{T} = T_R \overset{(2)}{\times}_{T_T} T_S$ comme sous-théorie pleine définie par des axiomes d'exactitude (de limites, finies) de $T_{\rho_\Delta(U_0)}$, ce qui donne la conclusion. Mais sachant désormais que la théorie $\mathcal{T}$ est représentable par un topos, et revenant à la description générale comme sous-théorie d'un $T_{\rho_\Delta(U_0)}$ (sans condition que R_0, S_0 stables par lim exactes), on voit que c'est donné par un sous-topos de $\rho_\Delta(U_0)$. Ainsi on trouve, si $T_0 \to S_0$ est surjectif sur les objets (comme dans le cas qui nous intéresse) que $R_0 \to U_0$ est surjectif sur les objets, donc $R \to U = R'$ ~~est géné~~ a une image qui est génératrice.

21

d) Passage à la limite. Cela correspond comme : les 2-limites inductives ~~dans~~ Δ, il faut montrer que les 2-limites transformées existent et sont des topos. La démonstration donnée dans ce monde en fait, pour les systèmes inductifs ~~de topos~~ dans Δ formés de topos [ou systèmes projectifs dans (Top)] (R_α) : on se débrouille pour choisir des ~~systèmes de~~ sites ou cat. génératrices ~~qui~~ $C_\alpha \subset R_\alpha$ sont stables par les morphismes de transition ~~...~~ — p.ex. à l'aide de filtrations cardinales, mais c'est un peu lourd pour une marche — et on prend ~~la catégorie limite~~ $C = \varinjlim_\alpha (C_\alpha)$, C_α, on ~~peut~~ obtient un sous-topos de $\widehat{C}$.

En l'occurrence, dans le cas filtrant ~~...~~ on voit que si R est le topos limite, ~~et si~~ les images des R dans R_α forment un syst. de générateurs. ~~...~~ ~~de générateurs~~ cat. géné. Si I s'envoie dans le syst. inductif des R_α, $I \to R_\alpha$ engendre R_α pour $\forall \alpha$, alors $I \to R$ engendre R.

$\rho(I) = \widehat{J}_0$ $\quad \rho'(J_1), \rho'$ adj. à Δ_π-...-analytique, où Δ_R cat. avec produits finis

$$\begin{tikzcd}
R_0 \arrow[r] & R_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}"] & R_2 \arrow[r, "\mathrm{loc}"] & R_3 = R \\
J_0 \arrow[u] \arrow[r, "\text{bij. sur objets}"] & J_1 \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{loc.}"', "(\text{bij. sur obj.})"] & J_2 \arrow[u] \arrow[ur, hook] & \\
I \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

$R_0 = \rho(I) = \widehat{J}_0$, $R_1 = \rho'(J_1)$, $R_2 = \rho'(J_2)$

J_1 = analytiques engendrés par J_0 (analytiques ...) et les faisceaux donnés analytiques lisses

J_2 = sous-analytiques pleins de R engendrés par $I \to R$, ens. sous-jacents J_0

R apparaît comme une catégorie de fractions de ~~...~~ $\widehat{J}_1$, où J_1 les analytiques lisses sur I engendrés par les faisceaux induits (sur J_0) par R, $\widehat{J}_1$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{J}_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}?"] \arrow[d, "\mathrm{loc}"'] & \widehat{J}_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{loc}"] & ? \\
R_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}"] & R_2 \arrow[r, "\mathrm{loc}"] & R_3
\end{tikzcd}$$

22

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

Structure représentée par $B_G = \hat{C}$ $C = \cancel{\text{Ens}}\,(\cdot, G)$

Relativisation dans un topos.

Topos produit.

Remarques sur les $T(E) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{top}}(E, R)^{\circ} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(R, E)$: ces catégories sont stables par lim filtrantes (car éliminant par voie de conditions sur des structures : elles ne conservent pas si des théories algébriques sur ~~quelconque~~ quelques ... $\Delta' \supset \Delta$. ND En général, aucun autre type de lim.

Question : Si $\forall E$, $T(E)$ admet des ~~produits~~ lim finies ~~quelconques~~, (et les $T_R(E) \to T_R(E')$ y commutent) alors T = relativisation à Δ d'une théorie algébrique sur Δ_0, i.e. $R \cong \hat{C}$, avec C (petite) ... i.e. C stable par lim finies ?

Si T est de ce type, en sait que $T(E)$ est stable par lim ~~finies~~ quelconques et accessible, (~~ND~~ ...) stable par lim quelc.

$T(E_{\mathrm{ens}}) \simeq \underleftarrow{\mathrm{PF}}(R)^{\circ} \simeq \mathrm{Fib}(R)$. Parmi ceux-ci il y a $R \not\simeq \mathrm{Top}(\phi)$

Sous topos des topos ~~...~~ R engendrés par un espace X (topos de structures ... d'un ... d'espaces) : ... $R = \hat{C}$, C = catégorie opposée des PtB ... finis, ou R = ... semi-simplicial. Ens - topos ... existe dans C, on trouve les sous-topos suivants (caractérisés par leurs points) : $\{ B, \phi, B^{+} = \mathrm{Im}(X \to \ast)$

de p.f. $\{ N, \phi, N^{*}$

Crit $| S, \phi, (\mathrm{Ens}\ \text{non vides})^{*}$

$S = (\mathrm{Ens}_f)^{\circ}$

Sous-thm $| \cancel{T(E)}, \phi$, $T(E) \subset E$ st catégorie pleine des objets ... E

$T(E) = \phi$ ... si $E = \mathrm{Top}(\phi)$

Sous-topos fermés complémentaires $\mid \phi, R, \Phi_0 = \complement U$

p. p. f. $\phi, N, \{\Delta_0\}$

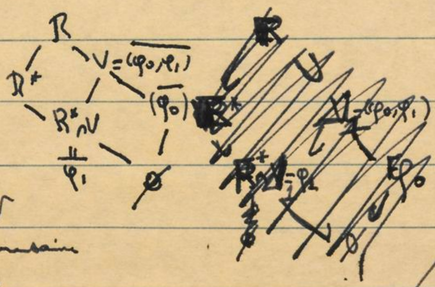
$T(E) \subset E$ catégorie ... réduite à objets vides

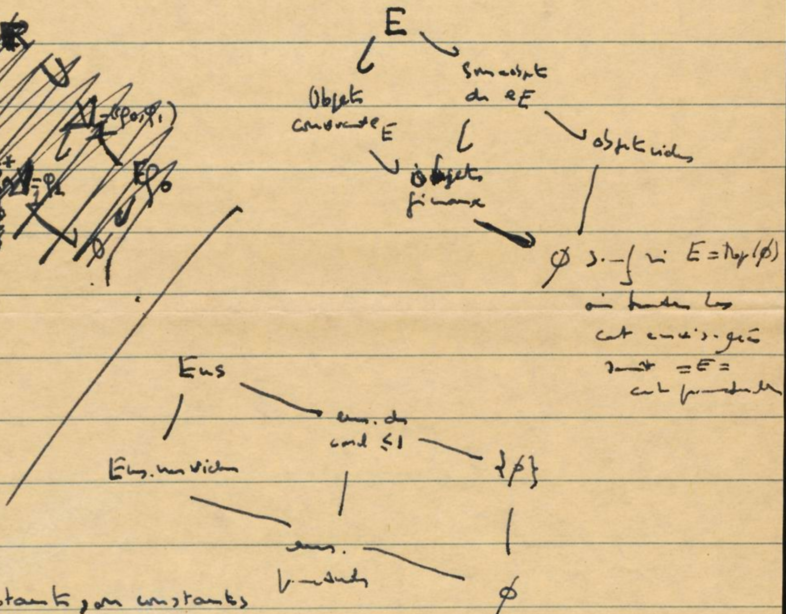
23

Il y a enfin un sous-topos V ~~A~~ qui n'est ni ouvert, ni fermé, ~~mais loc.~~ dont les pts sont Δ_0, Δ_1, et qui est donné par $T_V(E) =$ ens. des sous-objets de e_E (i.e. un objet $X \in \mathrm{Ob}\,E$ tel que $x \to x_e$ mono)

et ce sous-topos $\mathbb{E}^{f}_{\wedge} V$ ~~...~~ à plus prendre, point Δ_1, tel que $T_{U \wedge V}(E) \subset E$ objets finis i.e. $x \xrightarrow{\sim} e_E$

En résumé, on a 6 sous-topos, avec diagramme d'implications





NB ~~...~~ V et $R^f_{\wedge} V$ n'ont pas de complémentaire mais ils ont les complémentaires faibles ϕ et φ_0

V représente le foncteur $E \longmapsto \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(e_E)$

NB Pas d'objets loc. constants, non constants
Pas d'objets ~~constants~~ quasi-compacts non quasi-sép. etc. (resp. id. sur e)
Pas d'objets constructibles

Question Topos classifiant et sous-topos pour la structure

X, Y

$\underbrace{f : X \to Y \text{ sans plus}}$, ou $\underbrace{f : X \to X \text{ sans plus}}_{B_{\mathbb{N}^\times}}$, $\underbrace{f : e \to X}$

$X \times Y \to Z$, $X \times Y \to X$

$X \times X \longrightarrow X$!

$X \times X \rightrightarrows X$!!

24

25

Th. Soit 1) σ un ensemble de couples (S,λ), S catégorie, $\lambda = (\lambda', \lambda'')$ ens. de cônes (proj. et ind.) dans S

2) ρ un ens de ~~diagrammes~~ dispositions $(R_1, \delta_1, R_2, \delta_2, \varphi)$ où (R_i, δ_i) $(i=1,2)$ est une catégorie avec un $\delta_i = (\delta_i', \delta_i'')$ de cônes R une catégorie, ~~...~~ φ un foncteur $R_2 \xrightarrow{\varphi} R_1$ tel que $\varphi(\delta_2) \subset \delta_1$

Soit $\Delta = \Delta_{\sigma,\rho}$ la sous-2-catégorie de Cat défini ainsi

a) les objets sont les catégories E ayant les propriétés suivantes

a1) $\forall (S,\lambda) \in \sigma$ et tout foncteur $S \xrightarrow{u} E$, les systèmes projectifs et inductifs corresp. aux cônes $\in u(\lambda)$ ont une limite

a2) $\forall (R_1, \delta_1, \dots) \in \rho$, ~~et tout foncteur $u_1 : R_1 \to E$ qui est δ_1-exact, il existe un foncteur $u_2 : R_2 \to E$ qui est δ_2-exact et tel que $u_1\varphi_1 \cong u_2\varphi_2$~~ $u \mapsto u\circ\varphi$ induit une équivalence $\underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_1}(R_1, E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_2}(R_2, E)$

b) Pour $E, E' \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(E,E')$ est la sous-catégorie (stricte) pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(E,E')$ formée des foncteurs $F : E \to E'$ tels que l'on ait : $\forall (S,\lambda) \in \sigma$ et tout foncteur $u : S \to E$ qui est λ-exact, Fou est λ-exact. (Il est clair que cette condition est stable par isomorphisme et par composition et vérifiée si F est une ~~par les~~ équivalence de catégories.)

On suppose satisfaites les conditions

A) σ et ρ sont petits, ~~les~~ $\forall (S,\lambda) \in \sigma$ S est petit et λ est petit, et les ~~diagrammes~~ catégories d'indices des cônes $\in \lambda$ sont petites, de même pour ~~tout~~ $(R_1, \delta_1, R_2, \delta_2, \varphi) \in \rho$ les catégories R_i $(i=1,2)$ sont petites, les δ_i $(i=1,2)$ sont petits et les catégories d'indices des cônes $\in \delta_i$ sont petites.

B) $\forall (R, \dots) \in \rho$, $(R_i, \delta_i) \in \sigma$ pour $i = 1,2$. [On ne veut (ou du moins : la condition d'exactitude des foncteurs définis par (R_i, δ_i) est conséquence des celles définies par σ) introduire des conditions d'exactitude supplémentaires b)

26

sur les catégories E envisagées pour Δ (en plus des conditions d'existence de lim dans a)) que si les types de lim que les formulations de ces conditions impliquent existent déjà dans les E envisagées, et si les foncteurs admis entre ces E y commutent...]

Soit de plus C une catégorie ess. petite, $\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')$ un petit ensemble de ~~diag~~ cônes (proj. et ind) ~~définissant~~ correspondants à des petites catégories d'indices.

Alors il existe un $\underline{C' \in \mathrm{Ob}\,\Delta}$ et un foncteur $\boxed{i : C \to C'}$ qui est $\underline{\mathfrak{d}\text{-exact}}$, de telle façon que (C', i) soit 2-universel, i.e. pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, le foncteur $F \mapsto F \circ i$ induise une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta, i(\mathfrak{d})}(C', E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_{Cat, \mathfrak{d}}(C, E)$$

De plus, cette catégorie C' (définie à équivalence ~~unique~~ près définie à isom. unique près) est ess. petite

<u>Dém</u> On construit par réc. transfinie un ~~suite~~ (ps) syst. inductif transfini (C_i, d_i) de catégories sur C, munies d'un $d_i = (d_i', d_i'')$ de cônes, en procédant ainsi

$(C_0, d_0) = (C, d)$

$(C_{i+1}, d_{i+1}) = K(C_i, d_i)$, $T_i : C_i \to C_{i+1}$, où K est une opération à expliciter plus bas

$C_i = \varinjlim\limits_{j<i}^{(Cat)} C_j$, $d_i = \bigcup\limits_{j<i}$ (Im de d_j par $C_j \to C_i$) si i ordinal limite

On note $\alpha_i : C = C_0 \to C_i$

La construction K (indépendante de i) aura les propriétés suivantes, que pour la commodité des références nous écrivons avec les notations (C_i, d_i), (C_{i+1}, d_{i+1}):

27

a) $\forall E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, la fonction $u \mapsto u \circ \tau_i$ induit une équivalence

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{d_{i+1}}(C_{i+1}, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{d_i}(C_i, E)$$

b) $$\tau_i(d_i) \subset d_{i+1} \subset \tau_i(d_i) \cup \bigcup_{(S,\lambda)\in\varphi} \ \bigcup_{u\in \underline{\mathrm{Hom}}(S, C_{i+1})} u(\lambda)$$

c) $\tau_i : C_i \to C_{i+1}$ est <u>préexact</u> par d_i, i.e.

~~$\forall (R_1, \delta_1, R_2, \delta_2, \varphi) \in \rho$, et $u_1 : R_1 \to C_i$ tel que $u_1(\delta_1) \subset d_i$, il existe une fonction $v_2 : R_2 \to C_{i+1}$ tel que (et $v_2(\delta_2) \subset d_{i+1}$) $v_2 \circ \varphi_2 = (\tau_i u_1) \circ \varphi_1$~~

d) $\forall (S,\lambda) \in \sigma$ et $u : S \to C_i$, ~~et une catégorie I' (I'') ... dans $\in \lambda'$ ou (λ'') (i.e. $\lambda = (\lambda', \lambda'')$), il existe un cône c' (sur le syst. ... $\tau_i(c)$, tel que $c' \in d_{i+1}$)~~ $\exists$ une fonction $\bar v : \bar S \to C_{i+1}$ (où $\beta : S \to \bar S$ est obtenu en dédoublant les sommets des cônes critiques de S(**)) tel que $\bar v \beta = \tau_i u$, et tel que $\bar v(\bar\lambda) \subset d_{i+1}$

cf. difficultés avant (*)

~~Prouver que pour ... grand, ...~~

e) e0) $\forall (R_1, \delta_1, \ldots) \in \rho$ et $u_1, v_1 : R_1 \rightrightarrows C_i$ tel que $u_1(\delta_1) \subset d_i$, $v_1(\delta_1) \subset d_i$, et $\alpha_1, \beta_1 : u_1 \rightrightarrows v_1$, la relation $\alpha * \varphi = \beta * \varphi$ implique que $\tau_i * \alpha = \tau_i * \beta$

e1) $\forall (R_1, \delta_1, \ldots) \in \rho$ et $u_1, v_1 : R_1 \rightrightarrows C_i$ tel que $u_1(\delta_1), v_1(\delta_1) \subset d_i$, et tout hom $u_1 * \varphi \xrightarrow{\alpha_2} v_1 * \varphi$, $\exists$ un hom $\bar\alpha_1 : u_1 \xrightarrow{\bar\alpha_1} \tau_i v_1$ tel que $\bar\alpha_1 * \varphi = \tau_i * \alpha_2$

e2) $\forall (R_1, \delta_1, \ldots) \in \rho$ et $u_2 : R_2 \to C_i$ tel que $u_2(\delta_2) \subset d_i$, $\exists\, \bar u_1 : R_1 \to C_{i+1}$ tel que $\bar u_1 \circ \varphi = \tau_i \circ u_2$ et $\bar u_1(\delta_1) \subset d_{i+1}$

28

De a) on déduit par raisonnement transfini, pour $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$

(1) $\underline{\mathrm{Hom}}_{d_i}(C_i, E) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_d(C, E)$ $\quad (F \mapsto F\alpha_i)$

De b) on déduit de même

(2) $\alpha_i(d) \subset d_i \subset \alpha_i(d) \cup \bigsqcup_{\substack{j<i \\ (S,\lambda)\in\sigma}} \bigsqcup_{u\in \underline{\mathrm{Hom}}(S,C_j)} \tau_{ij}u(\lambda)$ si i ordinal limite

Prouvons que pour ω assez grand (ordinal limite) (un "petit" ordinal), (C_ω, d_ω) est une solution du Pb. ~~Cela signifie~~ Je veux qu'on ait

1°) $C_\omega \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ i.e. $\begin{cases} a_1)\ \forall (S,\lambda)\in\sigma' \text{ et } u : S \to C_\omega, \text{ existence des lim correspondant aux cônes } \in u(\lambda) \\ a_2)\ \forall (R_1,R_2,\ldots\varphi)\in\rho \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_1}(R_1, C_\omega) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\delta_2}(R_2, C_\omega) \end{cases}$

2°) $\alpha_\omega : C \to C_\omega$ est d exact

3°) $d_\omega = \alpha_\omega(d) \cup \bigsqcup_{(S,\lambda)\in\sigma} \bigsqcup_{u\in\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(S,C_\omega)} u(\lambda)$

[Car 3° implique que, pour $E \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ on a

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\alpha_\omega(d)}(C_\omega, E) = \underline{\mathrm{Hom}}_{d_\omega}(C_\omega, E) \xrightarrow[(1)]{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}_d(C, E)$

Soit I_ω l'ensemble des ordinaux $j<\omega$

Pour vérifier 2°) il suffit de vérifier l'assert plus forte

(3) $\forall i<\omega$, $\tau_{\omega,i} : C_i \to C_\omega$ est d_i-exact

Ceci résulte à son tour de c) si I_ω est grand devant les cardinaux card $F\ell\, I$, où I est une cat. d'indices intervenant dans un des cônes $\in d_i$; Or en vertu de (2), ces I ~~sont entre~~ sont ceux qui interviennent dans d, soit dans un λ associé à un $(S,\lambda)\in\sigma$ — c'est un petit ens de petites catégories, dont les card $F\ell\, I$ sont majorés par un cardinal π — et il suffit I_ω grand devant π.

29

Le résultat de (3) et (2) s'applique : $i = \alpha$ quelconque

$$\alpha_\omega(\alpha) \subset \alpha_\omega \subset \alpha_\omega(\alpha) \cup \bigcup_{(S,\lambda)\in\sigma} \bigcup_{u \in \underline{Hom}_\lambda(S, C_\omega)}$$ mod isom. des cônes

et pour prouver 3°) il faut donc prouver

4) $\forall (S,\lambda)\in\sigma$ et $u \in \underline{Hom}_\lambda(S, C_\omega)$, $\exists\, i<\omega$ et un hom $u_i : S \to C_i$ tel que $u_i(\lambda) \subset d_i$ (mod is. de cônes) et $u \simeq \tau_{\omega,i}\circ u_i$

~~Ce résultat ... fait que ... de d) et du fait que~~

Enfin, ~~pour~~ examinons 1°). ~~...~~

a_1) Sera conséquence de ~~e)~~ si nous notons que tout foncteur $u : S \to C_i$ se factorise par un C_i pourvu qu'on prenne $\pi \geq \mathrm{card}\, Fl\, S$ pour tout $(S,\lambda)\in\sigma$.

a_2) Sera conséquence de e), utilisant B (les $(B_i, \sigma_i) \in \sigma$)) et $\beta < \alpha_i$, et (3) (pour $i+1$ au lieu de i).

~~Donc il reste à dégager des conditions dans la construction~~
~~K qui assurent (4), et enfin d'expliciter une construction K~~

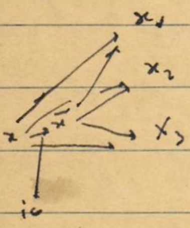
pensez-y ! Prouvons 4). On sait que $u : S \to C_\omega$ se factorise par un C_i (pourvu qu'on prenne $\pi \geq \mathrm{card}\, Fl\, S$ $\forall (S,\lambda)\in\sigma$), donc explicitement : comme on a τ_i, on peut supposer que ceci se produise au $\bar u_i : \bar S \to C_i$ tel que $\bar u(\bar\lambda) \subset d_i$, donc $\tau_{\omega,i}\circ \bar u_i$ est un homom $\bar S \to C$ qui est $\bar\lambda$ exact. grâce à (3). Comme u est λ-exact, $\bar u(i_c)$ est un isom pour tout $c\in\lambda$, donc $\bar u_i(i_c)$ devient un isom pour tout $c\in\lambda$, donc les $\tau_{j,i}\bar u_i(i_c) = \bar u_j(i_c)$ sont des isomorphismes pour $j \in J$ assez grand (pourvu que $\pi \geq \mathrm{card}\, \lambda = \mathrm{card}\, \{c\}$) donc les éléments cônes de $u(\lambda)$ sont isomorphes à ceux de $\bar u_j(\bar\lambda)$, comme ceux-ci sont dans d_i, il en est de même de ceux-là à isom près, cqfd.

30

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

* [illegible]

(1) Soit S une catégorie avec $\lambda = (\lambda', \lambda'')$ ens. de cônes. On lui associe une catégorie $\bar{S}$ et un foncteur $S \xrightarrow{\beta} \bar{S}$ ~~tel que~~ β en ajoutant, pour tout ~~sommet de cône~~ cône $c : (x \xrightarrow{p_\alpha} (x_\alpha)) \in \lambda'$, un objet $\bar{x}_c$ à S, avec une flèche $x \to \bar{x}_c$ et une famille de flèches $\bar{x}_c \xrightarrow{q_\alpha} x_\alpha$ factorisant les p_α — et de même duales pour les cônes $c'' \in \lambda''$.



On dit que $(\bar{S}, \bar{\lambda})$ est déduit de (S, λ) en dédoublant les sommets des cônes critiques de S; $\bar{\lambda}$ est formé des cônes déduits des cônes $c \in \lambda$ en remplaçant le sommet x_c par $\bar{x}_c$. Donc pour tout foncteur $u : S \to E$, avec $E \in \mathrm{Ob}\, D$, $\exists$ une unique extension $\bar{u} : \bar{S} \to E$ qui soit $\bar{\lambda}$-exacte; de plus, u est λ-exact ssi ~~[illegible]~~ pour tout $c \in \lambda$, $\bar{u}(i_c)$ est un isomorphisme.

(2) Définition de foncteur δ-préexact $D. \xrightarrow{u} F$, D muni d'un ens $\delta = (\delta', \delta'')$ de cônes....

31

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

32

$H^n(K(G,1), \Pi)$ $\quad \boxed{H^n(K(G,1), \Pi)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Simpl}(ENS)$

Lawvere theory $\quad \mathcal{L}$ a small cat. $\quad 1 \in \mathcal{L} \quad n = \amalg 1$

$(\mathcal{L}^\circ \to ENS) \quad Mod(\mathcal{L}^\circ)$

$S = Hom'(\mathcal{E}^\circ, ENS) \xleftarrow{\sim} Alg(\mathbb{T})$

F, U, (ENS)

$P \in Ob(S)$

1° $P_I = \amalg P \quad P \times I$

2° Every eq. rel is effective $\quad R \rightrightarrows P$

3° $f : X \to Y$ effective $\Leftrightarrow Hom(P, X) \to Hom(P, Y)$ surjective

4° Fibre prod

5° $P \to P \times K$, $P \times n$

$G_1 \to G_2 \to G_1 * G_2$

$T \to R$, $T \rightrightarrows X$

P $\quad Hom(P, X)$ $\quad$ morphism of the effective descents

$X \xrightarrow{f} Y$

Beck's Barr lemma

$A \xrightarrow{\Phi} Alg(\mathbb{T})$, F, U, $\mathbb{B} \xrightarrow{T} \mathbb{B}$

U tripleable

C/Y, f^*, C/X

$ENS \to \mathcal{I}$

$U(G_2)$, $U(f)$

$\rightrightarrows U(FUG) \xrightarrow{\varepsilon} U(G)$

$\pi(UG) \to (UG)$

$G \quad \underline{G} \quad \Pi = (UF, -, -)$

$T \to R$, $T_1 \to X$, $Q \to Y$

$A \rightleftarrows ENS$

$T \rightrightarrows \Pi(X) \xrightarrow{f} X$

U Tripl.

$UF(G) \to UG$

1° U is ~~conservative~~ Conserv.

2°

$UF(\;) \xrightarrow{T} (\;)$

$F(S) \rightrightarrows F(S) \xrightarrow{f} S \mapsto S$

$x \in Ob(B)$

$(UF)(UF)(X) \xrightarrow{f} X$

$\rightrightarrows T^2(\;) \xrightarrow{F} F(G) \to G$

$X_1 \rightrightarrows X_0 \to Q'$ in A

$T^2 \xrightarrow{T(f)} TX \xrightarrow{f} X \quad id$

$U(Q')$

$U(X_1) \rightrightarrows U(X_0) \to Q$

$T(X) \xrightarrow{\varepsilon} X$

1° $p_0 s_1 = s_0 p_1$

2° $p_1 s_1 = id$

$p_0 s_0 = id$

$X_1 \rightrightarrows X_0 \to X_{-1}$ $\quad (s_0 p_0, id_{X_0})$

$\Rightarrow X_1 \rightrightarrows X \xrightarrow{\Delta} Y$

33

~~Ens~~

$X_i \to X$

$UX_i \to UX$

C/S

$X_1 \rightrightarrows X_0 \longleftrightarrow Q$

$X \to X'$

C/S'

$X_1 \rightrightarrows X_1 \xrightarrow{p} Q$

$Q \rightrightarrows Q$

$\begin{cases} d_1 s_1 = id_{X_1} \\ d_0 s_1 = s_0 p \end{cases}$

$(Ens)^I \simeq$ I ensemble donné

$B = Top(E)$

$B \xrightarrow{f} B'$, $B_\pi \to B'$

$B \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} B'$ Y X

$\pi = f^* f_* : B \to B$ (exact à g.) accessible

$\begin{cases} \pi \to id \\ \pi \to \pi^2 \end{cases}$

~~Ens~~ $\underline{Alg(B,\pi)} \to B$ topos $= B_\pi$

$B \to B_\pi$ conservatif ~~fidèle~~

[conservatif très dense] $\overset{dif}{\Longleftrightarrow}$ f^* fidèle ($=$ conservatif)/ $\overset{th}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{B_\pi \xrightarrow{\approx} B}$

$\left\{\begin{array}{l} f^* \text{ conservatif} \\ f^* \text{ commute aux noyaux de couples} \end{array}\right\}$

$Hom_{Ens}(f^* X, Y) \simeq Hom_G(X, f_*(Y)) \simeq Hom_G(X, Hom_{Ens}(G, Y))$

$\underline{f_*(Y) = Hom(G, Y)}$

$Y \to Hom(G, Y)$

Soit B un topos

$\exists B'$ topos avec assez de pts

$\pi(Y) = Hom(G, Y) \to Y$, $G \to G$, $G^2 \to G$

$\tilde{C} \simeq B \xrightarrow{f} B'$, $\hat{C}$

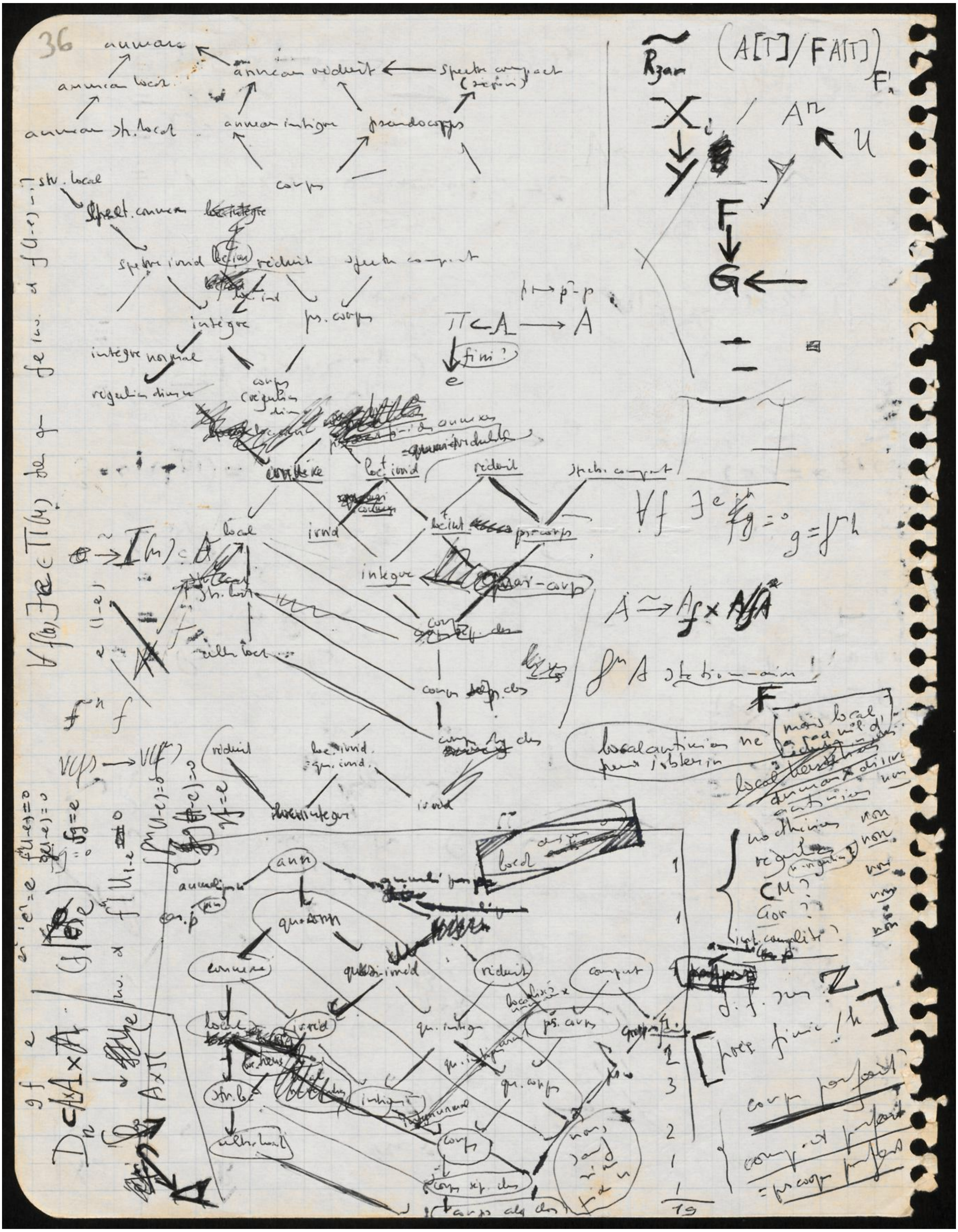
$\pi \to \pi^2$

$Hom(G,Y) \to Hom(G, Hom(G,Y)) \simeq Hom(G^2, Y)$

$G \leftarrow G^2$

34

35



https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

37

$\begin{cases} X_\infty \subset \mathcal{e}_{\hat{R}} \\ \text{crible de } R \end{cases}$

$X_\infty(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } Z_\infty \neq \emptyset \\ \{e\} & \text{si } Z_\infty = \emptyset \end{cases}$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}.\mathcal{H} = \hat{R}}(Z, \mathrm{Spec}(\mathcal{B}))$

$\hat{R}$ — R (ex. g.) — $\mathrm{Pro}\,R$ — R (ex. g.)

Sous-topos ouvert de $\hat{R} = \mathcal{B}$ $\qquad \mathcal{B}' \xrightarrow{i} \mathcal{B}$

sous objet de $e_{\mathcal{B}}$ (fonctions pour dual sur R°)

crible de R $\qquad C_R \xrightarrow{f} C$

cribles de $\mathcal{B}$

sous structure distinguée de $T = T_{\mathcal{B}}$

$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{/S} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{B}$

$= \hat{C}_R \xrightarrow{\hat{i}} \mathcal{B} = \hat{R}$

$= \tilde{C}_{\mathcal{B}}$ ($C_{\mathcal{B}}$ avec top. can) $\to \tilde{\mathcal{B}}_\tau = \mathcal{B}_\tau$

$=$ Types dérivés de T', $\mathcal{B}_{T'} \to \mathcal{B}_T$

$S = i_!(e_{\mathcal{B}'})$ = plus petit sous-objet de $e_{\mathcal{B}}$ tel que $i^*(S) = e_{\mathcal{B}'}$

i.e. i^* transforme $S \to e_{\mathcal{B}}$ en isomorphisme

$= \left(x \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin C_R \\ \{e\} & \text{si } x \in C_R \end{cases} \right)$, $x \in \mathrm{Ob}\,R$

= plus grand sous-objet de $e_{\mathcal{B}}$ qui est dans $C_{\mathcal{B}}$

= plus grand sous-objet de ... tel que $A|S \in T'(\mathcal{E}_S)$

$C_R = \{ x \in \mathrm{Ob}\,R \mid x \in \mathrm{Im\,ess}(i : \mathcal{B}' \to \mathcal{B} = \hat{R}) \}$

$= \{ C/S$

$= R \cap C_{\mathcal{B}}$

$= \{ \ldots A | R_{/x} \in T'(R_{/x}) \}$ $\qquad$ Com: $A | \hat{R}_{/x} \in T'(\hat{R}_{/x})$

$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \ldots = \{ A \mid x \in T'(\mathcal{B}_{/x}) \}$, $T' = T_{\mathcal{B}/S}$, $f^*(\mathcal{B}) \supset e$

1) anneau (commut. unifère) $\quad X_{ann} = \widehat{R} \quad$ R = schémas affines de t.f. $/\mathbb{Z}$ $\simeq$ (alg. de t.f. sur $\mathbb{Z}$)^0

2) anneau local $\quad X_{anloc} = \widetilde{R}_{zar} \quad$ zar = topologie de Zariski.
($U \simeq U_f \cup U_{1-f}$, cas universel $U = \mathbb{A}$, f diagonale)

4) anneau str. local $\quad X_{anstrloc} = \widetilde{R}_{et} \quad$ et = topologie étale
(local, et pour tout U et schéma rel. étale d'un U avec $U' \to U$ (et-schéma fini) surjectif. "surjectif" de schémas, ~~lacomplexe~~
U' a loc. une section sur U ; suffit de cas universel $U = A^n$, $U' = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}[T]/(F)$ $F(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n$, les a_i les n projections de A^n, F' dérivée de F ...

3) anneau local hensélien $\quad X_{anlochen} = \widetilde{R}_{hen} \quad$ hen = topologie hensélienne,
[Si $X' \to X$ dans R est couvrant pour hen, $B' \leftarrow B$ ... on veut que $\mathrm{Hom}_{an}(B', A) \to \mathrm{Hom}_{an}(B, A)$ soit épi.] $\quad$ $X_i \to X$ est couvrante ssi $\forall$ anneau local hensélien A, $X_i(A) \to X(A)$ l'est

5) anneau ultralocal $\quad X_{anultloc} = \widetilde{R}_{fppf}$
Si $X' \to X$ dans R couvrant pour fppf, alors $A(X') \to A(X)$ est épi (il suffit de prendre $X' \to X$ qu. fini plat et ... fini et plat et ... dans le cas universel $U = \mathbb{A}^n$, $U' = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}[T]/(F)$, F comme dans 4). Question : soit $X' \to X$ dans R tel que $\forall$ anneau ultralocal ordinaire A, $X'(A) \to X(A)$ est épi, alors $X' \to X$ est-il couvrant fppf ? Résultat des courses : tout anneau local noeth. A (ess.t de t.f. sur $\mathbb{Z}$) admet un homom. local dans un anneau ultralocal $\mathcal{O}$ qui est limite inductive d'algèbres fid. plates de t.f. sur A.

6) anneau réduit $\quad X_{red} \simeq \widetilde{R}_{top\,red} \simeq \widehat{R_{red}}$
$\mathcal{O}_A \xrightarrow{\sim} \varinjlim_n (\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{x \mapsto x^n} A))$ (cas universel) $\Updownarrow$ $\forall$ ... $V(f^n) \to V(f)$ $\forall f \in A(U)$, $n \in \mathbb{N}$
top red la top. sur R où $X_i \to Y$ est couvrante ssi $\forall \mathcal{O}$ réduit, $X_i(\mathcal{O}) \to Y(\mathcal{O})$ l'est, i.e. s'il existe une section sur Y_{red} ... R_{red} catégorie des ... de R réduits (peut être considérée comme une cofinale ...) [illegible]

NB X_{red} peut être défini par des lim finies ce qui se voit sur $X_{red} \simeq \widetilde{R}_{red}$ avec R_{red} admettant des lim finies

7) anneau intègre $\quad X_{int} \simeq \widetilde{R}_{top\,int} \quad$ top int la top. sur R où $X_i \to Y$ est couvrante ssi pour toute comp. irred. Y_α de Y avec str. ind. réduite il y a section au dessus.
a) $A \amalg A \twoheadrightarrow D \subset A \times A$, $x \mapsto (x, 0)$, $y \mapsto (0, y)$; $\quad$ cart $(x, y) \mapsto xy$, $e \xrightarrow{0} A$
est un épi
b) $\emptyset_E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(0_A, 1_A : e \rightrightarrows A)$

NB b) assure que les familles vides couvrantes pour la top. int. ... $\emptyset_R$ de R ...

$\forall V(fg) = V(f) \vee V(g)$ $\forall f, g \in A(U)$; $V(1_A) = \not{e}$

Les objets $F \in \widehat{R}_{top\,int}$ sont les $F \in \widehat{R}$ tels que $\forall X \in \mathrm{ob}\,R$, avec X_i, $i \in I$ famille des comp. irréd., $F(X) \to \prod F(X_i) \rightrightarrows \prod F(X_i \times_X X_j)$ exacte.
Des ~~transform~~ sommes finies en produits.

38

39

8) Anneau irréductible

$\overline{\text{Arrêt}}$ $\stackrel{\text{df}}{=}$ A / $\varinjlim\left(I_n = \mathrm{Ker}\left(A \xrightarrow{x \mapsto x^n} A\right)\right)$ est intègre

$\underbrace{}$ un radical $\mathcal{N}$

i.e. a) $A \times \mathcal{N} \amalg \mathcal{N} \times A \xrightarrow{v} D_{\mathcal{N}} \hookrightarrow A \times A$

$\downarrow$ cart $\downarrow (x,y) \mapsto xy$

$\mathcal{N} \hookrightarrow A$

v épi

b) $V(1_A) \simeq \emptyset_{\mathcal{E}}$

i.e. $\begin{cases} \forall f, g \in A(U), & \varinjlim_n V(fg^n) \simeq \varinjlim V(f) \vee \varinjlim V(g^n) \\ V(1_A) \simeq \emptyset_{\mathcal{E}} \end{cases}$

$\dot{X}_{irr} \simeq \widetilde{R_{top\ irr}}$ top irred la topologie ou une famille $X_i \to X$ est couvrante ssi $\forall$ comp. irréductible de X, et $\forall$ voisinage irréductible... T_h, l'un des X_i a une section sur ...

NB Cette topologie n'est pas quasi-compacte, il y a des recouvrements (de l'... tout schéma irréductible) à partir d'un comp. connexe ... irréductible qui n'admettent pas de ss-recouvrement fini

On obtient un exemple d'un sous-topos X_{irr} dans ~~...~~ cohérent du topos cohérent X_{aus}

NB Les $F \in \mathrm{Ob}\, X_{irr}$ $\mathrm{clb}\ \hat{R}$ transforment les sommes finies en produits

$\mathrm{Ob}\ \widetilde{R_{top\ irr}}$

9) Anneau connexe (i.e. à sp. conn.)

$X_{conn} = \widetilde{R_{top\ conn}}$ $\simeq \widehat{R_{conn}}$ (R_{conn} ss-cat des schémas conn.) cohn top. où les familles couvrantes $X_i \to X$ sont celles qui ... une section sur les composantes connexes (c'est ... d'ailleurs ... vide ... $\emptyset$)

$\forall f \in A(U), f^2 = f \Rightarrow f = 1$ ou $f = 0$ loc.

i.e. dans le univ. $U = A$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{x \mapsto x^2 - x} & A \\ \downarrow & & \uparrow 0_A \\ \mathcal{E} \amalg \mathcal{E} \xrightarrow{u} \Pi & \longrightarrow & e \end{array}$$

(projecteurs) u épi

R_{conn} : $R \mapsto \mathcal{E}_{R}$ transforme ~~...~~ les sommes finies de ... (de ... ≥ 1) objets non vides en produits (NB ... connexe ... transformait les faisceaux qui ... sommes finies en produits ...)

$X_{conn \neq \emptyset} \simeq \widehat{R_{conn \neq \emptyset}}$

10) Anneau ~~...~~ local de dimension ~~...~~

Suffit dans ce cas $\forall f \in A(U)$, universelle $\ U_f \coprod_{\mathbb{R}}^{\varinjlim} V(f^n) \longrightarrow U$ épi

$A^* \amalg \mathcal{N}_A \longrightarrow A$ est épi ($\mathcal{N}_A \doteq \varinjlim(\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{x \mapsto x^n} A))$

~~[illegible] 2 : 3 [illegible] $X_\emptyset$ = sous-types [illegible] des X [illegible]~~
~~correspond. [illegible] à l'anneau [illegible] et~~

40

2

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

$X_{cpct} \simeq \widetilde{R_{cpct\,top}}$ cpct et la topologie sur R pour laquelle $X_i \to X$ est couv. si [illegible] anneau local artinien (ou autour de dim 0) O, $X_i(O) \to X(O)$ est épimorphique.

ennui : ces topos non cohérents (choisir plutôt des topos d'un topos cohérent)

Anneau local de dim 0 réduit

(11) ~~[illegible]~~ corps = ~~compact réduits~~

$A^{\alpha} \amalg_{\hat{R}} A \xrightarrow{mul, u_A} A$ est épi

$X_{ps.corps} \simeq \widetilde{R_{topos}}$ can, top. sur R où les familles couvrantes sont celles qui sont des familles surj. sur chaque point.

$\simeq \widetilde{R_{can}}$ R_{can} la catégorie des schémas compacts réduits associés aux schémas de t.f. sur $\mathbb{Z}$, avec top. de Zariski

$\widetilde{R_{can}}$ formé des foncteurs contravariants qui commutent aux lim. finis

(12) corps = compact ~~[illegible]~~ (intègre = [illegible] ps-corps intègre = ps-corps local) ~~[illegible]~~ réciproquement

NB Les ps-topos définis en 11), 12) sont ces pts, donc sont définis par leurs points. Il n'est pas clair qu'il en soit ainsi pour les intersections de plusieurs de ces sous-topos. Donc pour vérifier que deux intersections sont égales, il faut ~~[illegible]~~ ou avoir des vrai d'[illegible] de dimension, il n'est pas clair qu'il suffise de vérifier pour leurs pts, i.e. pour les structures ensemblistes — sauf si on vérifie à chaque fois que les int. précis. ont assez de pts !

Vérifier donc qu'un anneau ~~[illegible]~~ A est ps-corps local (loc. intègre) A est intègre

→ La définition marche pour les $A : R \to E$ transformant sommes ~~familles~~ couvrantes pour "top. cpct" en familles couvrantes, Montrons qu'une famille $X_i \to X$ qui est couvrante pour top. discrète des anneaux de dim 0 (i.e. $X_i(k) \to X(k)$ est épi pour tout corps k) ~~est transformé~~ est couvrante pour dim X assez évident.

41
https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

(12) Anneau compact (i.e. à spectre compact) $\qquad \widetilde{X_{cpct} \simeq R_{top\,cpct}}$

$\forall U$, $A(U)$ à spectre cpct i.e. $\forall f \in A(U)$, $\exists (1)\ e \in A(U)$, $e^2 = e$, ef inversible dans $eA(U)$, $(1-e)f$ nilpotent. Suffit de le faire pour f universel, $U = A$. On trouve, si $D_n \subset A \times A \times A$ formé des g, f, e avec $e^2 = e$, $f(1-e) = 0$, $g(1-e) = 0$, $fg = e$, un [illegible] indexé par n

$i_n : D_n \hookrightarrow A$

et la condition est que les D_n couvrent A.

Pour la top. de $R_{top\,cpct}$, cela donne la condition forte, si $D_n = \varinjlim_R A^{*} \xrightarrow{i_n} A$

attention, ici au sens de R, pas $\hat{R}$

la famille des i_n soit couvrante.

topologie non cohérente ! A-t-elle un sens du plus ?? ?

(13) Anneau compact réduit = pseudo-corps $\qquad \widetilde{X_{cpct} \simeq R_{top\,ps\,corps}} \simeq \widehat{R_{corps}}$

$\forall U$, $A(U) \to$ ps. cpct i.e. $\forall f \in A(U)$, $A(U) \simeq A_f \times A/fA$, i.e. $\exists (1)\ e \in A(U)$, $e^2 = e$, ef inv., $e(1-f) = 0$

i.e. $i_1 : D_1 \hookrightarrow A$ est un isom.

ps. corps avec la topologie engendrée par les $X' \to X$ qui sont un isom. fibre par fibre ($(X_i \to X)$ couvrante ssi $\exists\ X_{i_0} \to X$ ainsi). R_{corps} comme avant, localisé de R pour les ~~topologie~~ flèches ~~bijectives~~ à ext. résiduelles triviales.

$\hat{R}_{corps} \subset \hat{R}_{ps}$ formé des $R^{\circ} \to Ens$ qui transforment les flèches précédentes [illegible]

(14) Corps sép. clos = corps str. henséliens $\qquad \widetilde{X_{corps\,hens} \simeq R_{top\,corps\,séparables}}$

top. corps hens., topologie où les familles couvrantes sont celles ~~[illegible]~~ $X_i \to X$ qui ~~[illegible]~~ ont un pt ~~[illegible]~~ séparable (i.e. fini sép.) sur chaque [illegible]

$\simeq \widetilde{(R_{corps})_{et}}$ $\quad R_{corps}$ comme dans (13), avec top. étale.

42

(15) Corps alg. clos = corps ~~[illegible]~~ $X_{\text{corps alg clos}} \simeq R_{\text{top corps alg clos}}$

topologie où $X_i \to X$ est couvrante si elle est surjective

$\simeq R_{\text{ens finis}}$ R ens comme dans "topologie finie" = topologie des familles ~~surjectives~~ ~~couvrantes~~ familles finies surjectives.

(16) Anneau annulé par n ($n \geq 1$)

(a) $n1_A = 0$ ou $V(n1_A) \hookrightarrow e_E$ isom

$X_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq R_{\text{top } n\text{-tors}} \simeq \hat{R}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

top n-tors topologie où $X_i \to X$ est couvrante si les $V(n1_{X_i}) \to V(n1_X)$, ~~[illegible]~~ forment ($X_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$R_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ~~top. des~~ sous-cat. pleine de R formée des X qui sont des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-schémas

~~[illegible]~~

Sous-topos fermé de $X_{an} = \hat{R}$, $X_{n\text{-tors}} = X_p$ = topos ponctuel

N.B. ($R_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ peut être considéré comme une catégorie de fractions de R par les flèches f telles que $f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bijection)

Ex Si n premier, on trouve les anneaux de corps p...

anneau où n inversible.

(b) $X_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]} \simeq R_{\text{top } \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]} \simeq R_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}$

top $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, top. où $X_i \to X$ est couvrante si les $X_i \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \to X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ a une section

$R_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}$, sous-cat. pleine de R des $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ schémas aff. de t.f.

Sous-topos ouvert

(c) ~~Soit plus généralement $S \to e_R$ un mono. dans R, R = Sch-aff ($\mathbb{Z} \to \Lambda$ épi dans) dite $R_{/S} \hookrightarrow R$ sous-catégorie pleine de R (correspondant aux anneaux de t.f. sur $\mathbb{Z}$ qui sont des Λ-algèbres). Considérons les Anneaux du topos E qui sont Λ-algèbres (la structure de Λ-algèbre est-elle unique? Oui, si Λ est ... le procédé standard ... ensemblistes. Les Λ-algèbres de E sont les foncteurs $E \to$ Ens(Λ-alg) $\to$ (Ann) qui sont représentables ensemblistement. Or~~ ~~(A-alg) → Hom~~ Or ... (Ann) de ... (R ...)

(où $\mathcal{C}'$ signifie [illegible]) et Λ-algs à $\underline{Hom}'(R_\Lambda, Ens)$

— R_Λ cat. des schémas de t.f. sur Λ, le foncteur [illegible]

$\underline{Hom}'(R_\Lambda, Ens) \hookrightarrow \underline{Hom}'(R_{\mathbb{Z}}, Ens)$ est transport de

$A \mapsto (B \mapsto Hom(B,A))$ ≅↑ (Λ-alg) ⟵ ≅↑ (Ann) $A \mapsto (B \mapsto Hom_{\mathbb{Z}}(B,A))$, ≅ $Hom_\Lambda(B_\Lambda, A)$

foncteur $R \to R_\Lambda$, $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ i.e. $X \mapsto X \times_e S = X \times S$ si A un Λ-alg.

(qui est en effet [illegible]). Donc

$$X_{\Lambda\text{-alg}} \simeq \widetilde{R_{\Lambda\text{-alg}}} \simeq \widehat{R_\Lambda}$$

Λ-alg : [illegible] X commute aux [illegible] les $X \times S \to X \times_e S$ [illegible]

NB R_Λ est aussi déduit de R par [illegible] foncteurs, [illegible] f telles que $f \times_e S$ [illegible].

Ex $X_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-alg}}$, $X_{car\, p}$ (car p [illegible]), $X_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}$

$X_{\mathbb{Q}} = X_{car.\, 0} = \bigcap_{n \geq 2} X_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}$

NB Ce qui vient d'être vu se généralise au cas d'un R quelconque avec lim finies, et l'emploi de structures correspondantes T. On se donne $\Lambda \in T(Ens) = Ob\, R^\circ$, i.e. $S \in Pro\, R$, on suppose que $S \to e_R$ [illegible], et on considère R_S = catégorie des foncteurs de R [illegible] $\times_e S$, [illegible] $Pro\, R/_S$ par $R \to Pro\, R/_S$, $X \mapsto X \times_e S$. Comme $Pro\, R \hookrightarrow \widehat{R}$, [illegible] $S \in Ob\, \widehat{R}$, [illegible] dans l'image [illegible] de $Pro\, R$, et s'intéresser aux $f : E \to \widehat{R}$ tels que $f^*(S) \to f^*(e_R) = e_E$ [illegible] $f^*(S) \subset e$.

C'est la forme générale des structures [illegible] représentables par des ouverts du topos classifiant $\widehat{R}$ 44

$T(Ens)^\circ$ [illegible]

montrer que si $S \in Pro\, R$, [illegible] conditions [illegible]

(∀ cat. R stable par lim. finies ou petites) — 16 (suite)

Plus gén., pour tout mono $S \overset{i}{\hookrightarrow} e_R$ dans $\mathcal{R}$, d'où sous-catégorie $R_{/S}$ de $\mathcal{R}$, ~~Est sous-catégorie~~ considérons (~~les topos~~ R-$\mathcal{E}$) les $R \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}$ ~~tels que~~ φ lim. proj. [illegible] ex. à g., i.e. $\forall X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{E}$, $\mathrm{Hom}(X,-)\circ\varphi : R \to (\mathrm{Ens})$ ex. à g. — et [illegible] pro-préfaisceaux (avec vérif. des flèches).

Or les foncteurs ex. à g. $R \to \mathrm{Ens}$ s'identifient aux éléments de $\mathrm{Pro}\, R$ (ind. pro-représentables), et on prend donc les $\xi \in \mathrm{Pro}\, R$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro} R}(\xi, S) \neq \emptyset$, i.e. [illegible] dans [illegible] les éléments de $\mathrm{Pro}(R_{/S})$, ~~Alors~~ on a [illegible] la sous-cat. pleine de $\mathcal{C} = (\mathrm{Pro}(R))^{\circ} = \mathrm{Ind}(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G} = R^{\circ}$) (qui ~~sont~~ de $\mathcal{E}$) tels qu'il existe un morphisme $\Lambda \to \xi$, où $\Lambda \to$ l'objet de $\mathcal{G}$ correspondant à S. On a pour les ~~structures~~ [illegible] des topos ~~[illegible]~~ classifiants $\widehat{R_{/S}}$, avec $\widehat{R_{/S}} \xrightarrow{\hat{i}} \widehat{R}$ déduit de $i : R_{/S} \to \mathcal{R}$.

On a i^{*} = [illegible] de $R_{/S}$ dans R, $i^{*}(X) = X \times_e S / S$

$$i_{*}(Y) = \{ X \mapsto \mathrm{Hom}(X \times S, Y) = \mathrm{Hom}_S(X \times S, Y)\},$$

(obj. de R sur S; $X \in \mathrm{Ob}\, R$)

donc $i_{*}(Y) = \underline{\mathrm{Hom}}(S, Y)$.

Considérons maintenant une famille $S_\alpha \overset{i_\alpha}{\hookrightarrow} e_{\mathcal{R}}$ filtrante décroissante de sous-objets de e_R, et soit $T' = \bigcap_\alpha T_{S_\alpha}$ l'[illegible] de la structure de $T = T_R = T_{\widehat{R}}$ définie par les conditions $\varphi(i_\alpha) = f^{*}(i_\alpha)$, où $f : \mathcal{E} \to \mathcal{B}_T = \widehat{R}$) [illegible] pour tout α.

Définissons par [illegible] sur les $\mathrm{Hom}(X,-)\circ\varphi$, on revient à examiner le cas du topos ponctuel $\mathcal{E} = (\mathrm{Ens})$ ~~On doit donc préciser~~ $S = (S_\alpha)_\alpha \in \mathrm{Pro}\, R$, ~~les objets~~ d'où $\xi = (\xi_\alpha) \in \mathrm{Ind}\, \mathcal{G}$, $\xi \to e_R = e_{\mathrm{Pro} R}$ est un mono, les objets [illegible] de $\mathcal{G}$ sont ceux pour lesquels il existe un (unique) morphisme $\xi \to O$, donc dans $\mathrm{Pro}\, R = \mathcal{R}$ ce sont ceux [illegible] (uniques) $X \to S \hookrightarrow e_R = e_{\mathcal{R}}$. Mais quelle est la catégorie ~~Comment~~ R' [illegible] un petit R' avec [illegible] classifiant ? $\mathcal{B}_{/S_\alpha}$. On a déterminé ces [illegible], mais quels sont ces pts ?

Soit $X \mapsto X \times_e S$, on a [illegible], la catégorie $\varprojlim \mathcal{R}_{/S_\alpha}$; $\bigcap_\alpha \mathcal{B}_{T_\alpha} = \bigcap \widehat{R_{/S_\alpha}} \to \mathcal{R}_{/S_\alpha}$ [illegible] $\varprojlim \mathcal{R}_{/S_\alpha} \to \mathrm{Pro}\, R_{/S} \to \mathrm{Pro}\, R$ [illegible] — La catégorie pro-modulaire [illegible] $\varprojlim R_{/S_\alpha}$ [illegible]

(17) Anneau parfait de car. p (p>0)

$p1_A = 0$, $A \xrightarrow{x \mapsto x^p} A$ isom

en car. 0, on convient que parfait signifie réduit?

$N\beta$ parfait $\Rightarrow$ réduit

$$X_{p\text{-parf}} = \widetilde{R_{p\text{-parf}}} = \widetilde{R_{p\text{-parf}}}$$

$R_{p\,\text{parf}}$ catégorie des schémas affines sur car. p parfaits qui sont clôtures parfaites de schémas de type fini sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

top. p-parf sur R : $X_i \to X$ est couvrante si $\exists i_0$, $(X_{i_0})_p \to (X)_p$ admet une section après passage à la clôture parfaite de X_p

(18) ~~Anneaux cotés~~ compact parfait de car. $p(\geq 0)$.

parfait de car. p ou p.comp

$$X_{\text{~~parf~~}\ p\text{-parf}} \simeq \widetilde{R_{\text{[illegible]}}} \simeq R_{\text{comp p-parf}}$$

top. quel p parfaite : $X_i \to X$ est couvrante ssi $\exists i_0$ tq. $X_{i_0\,p} \to X_p$ a un pt radiciel au dessus de ch. pt de X_p

$R_{\text{comp p-parf}}$ = catégorie des clôtures parfaites des schémas de car. p dans R_{comp}.

(19) Corps parfait ~~[illegible]~~ (car. $p \geq 0$)

$$X_{\text{corps p-parf}} \simeq \widetilde{R_{\text{typ corps p-parf}}} \simeq \mathbb{P}$$

$\widetilde{R_{\text{corps\ ~~parf~~}\ \text{Zar}}}$

$X_i \to X$ est couvrante ssi $X_{i\,p} \to X_p$ des pt radiciels pts ou par fibres.

(20) ~~Anneaux à caractéristique~~

~~(Anneau parfait (de car. p parfait, ou corps parfait))~~

~~de car. $p>0$ ou précisé (inclus car 0)~~

~~A. On veut que tout sous $\mathcal{E}$ il ait les propriétés analogues. Soit C l'ens des nbs qui ne sont premiers, plus 0 (comme car. de car. 0), soit le symbole ϕ. Alors $\mathcal{E}$ se décompose canoniquement en $\mathcal{E}_\phi \simeq \coprod_{c \in C} U_c$, ou $\mathcal{E}_\phi$ ~~$\mathcal{E}$~~ $|U_c$ de car. p si $c \neq \phi$, et $1U_\phi = 0$. Soient alors $X_{\text{~~parf~~}} \subset X_{\text{ann}}$, $X_{\text{~~[illegible]~~}} \subset$ deux intersections~~

20) Anneau à car.

$X_{car.} = \widetilde{R_{top.car}}$

loc. sur $\mathcal{E}$, A est de car $p > 0$ ou de car. 0 i.e. la famille

des $V(p.1) \hookrightarrow e_{\mathcal{E}}$

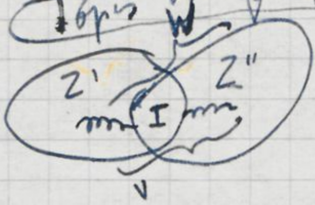
$\bigcap_{n \geq 1} (e_{\mathcal{E}} \xrightarrow{n 1_A})$

est épimorphique (cela fait que $\mathcal{E} \to \widehat{R}$ se factorise par le sous-topos Sup ... d'un topos classifiant)

On a $\mathcal{E} \to \widehat{R}$ se factorise localement sur $\mathcal{E}$ par la réunion $V = X_{car.0}$ des sous-topos ouverts $\widehat{R_{Z/pZ}} \simeq \widehat{R}$ sur Z/pZ, et le sous-topos $\widehat{R_{Q}}$ (qui n'est pas un sous-topos ouvert) avec ...

On "top car" est la borne inférieure des "top car p" pour ... i.e. la famille $X_i \to X$ ... connexes ... il existe un indice $i(p)$ tel que $(X_{i(p)})_p \to (X)_p$ (fibre en p) soit ... C'est ... la famille des $(X_p \to X$, p ...$)$ ... et si $X_Q \neq \emptyset$ ...

Topos non ...



Plus généralement, soient $\mathcal{B}$ un topos, V et W deux sous-topos, considérons $T = T_{\mathcal{B}}$, et T_V et T_W, ... $T' = (\mathcal{E} \to \mathcal{B})$ se factorise localement par $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$. Cela ... i.e. $e_{\mathcal{E}} = \mathrm{Sup}(e', e'')$, ... e' ... le plus grand ouvert de $\mathcal{E}$ ... $f \cdot \mathcal{E}_{/e'}$ se factorise par ..., et ... pour e''. On a alors $f^{\mathcal{B}}/e' \wedge e'' \to V \cap W$, ... $e' \wedge e''$ ... le plus grand ouvert U ... $\subset e_{\mathcal{E}}$ ... cette propriété? [Si ... U est ainsi, ...: $U \subset e'$, $U \subset e''$, donc $U \subset e' \wedge e''$, ok.] / S'il y a un topos classifiant pour T, c'est un sous-topos $Z \subset \mathcal{B}$ tel que Z ~~...~~ contient V et W et ayant des sous-topos ouverts $Z' = Z_{/e'}$, $Z'' = Z_{/e''}$, avec $Z' \subset V$, $Z'' \subset W$, et $\mathrm{Sup}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'') = e_Z$ i.e. $Z = \mathrm{Sup}(Z', Z'')$ (dans l'un des sous-topos de Z, ou de $\mathcal{B}$, c'est kif kif). On aura donc

$$Z = \mathrm{Sup}(Z', Z'') \subset \mathrm{Sup}(V, W) \subset Z$$

donc $Z = \mathrm{Sup}(V, W)$. De plus on aura ~~...~~ $Z' = Z \cap V = Z \times_Z V$ = ouvert de V

Z'' = ouvert de W

47

(20 juin)

donc $Z' \cap Z''$ est un ouvert dans $V \cap W = U$; d'ailleurs, Z est obtenu en recollant Z' et Z'' suivant I (comme [illegible]). De même $Z'' \cap V$ est un ouvert de V, (mais pas [illegible] de Z'') qui, avec l'ouvert Z', recouvre V, et [illegible] en sens, d'ailleurs.

Inversement : Pour que le Pb ait une solution, il faut et s. ~~qu'il existe un ouvert Z' de V~~ ~~que~~ $\exists$ Z' ~~et le plus grand~~ ouvert de V qui induit un ouvert ~~sur~~ $Z' \cap W$ sur W, et Z'' ~~le plus grand~~ ouvert de W qui induise un ouvert $Z'' \cap V$ sur V, alors $V = \mathrm{Sup}(Z', Z'' \cap V)$, $W = \mathrm{Sup}(Z'', Z' \cap W)$.

On a vu que c'est nécessaire. Pour voir que c'est suffisant, considérons ~~le~~ topos Z^R qui est obtenu en recollant Z' et Z'' suivant leur intersection Z, d'où un morphisme $Z \longrightarrow B$ qui est un plongement (à vérifier) et des morphismes $V \longrightarrow Z^R$ et $W \longrightarrow Z$ qui sont définis via $Z' \xrightarrow{id} Z'$ et $V \cap Z'' \longrightarrow Z''$ d'une part ($V = \mathrm{Sup}(Z', V \cap Z'')$) et via ... d'autre part, puis $Z \longrightarrow B$ en [illegible] des plongements (les composés avec [illegible] les plongements donnés), donc $V, W \subset Z \subset B$. On voit alors aussitôt que Z satisfait à la condition.

NB Il suffit en particulier que $Z' \cap Z''$ soit ouvert dans Z' et dans Z''....

Dans le cas $B = \widehat{R} = X_{[illegible]}$, $V = X_{(car > 0)}$, $W = X_{car\, 0}$, on sait que V est déjà un ouvert de $B = \widehat{R}$ (correspondant au crible des objets $X \in \mathrm{Ob}\, R$ qui ont une car positive ~~[illegible]~~ précisé); NB ce crible ~~n'a pas de [illegible]~~ provenant des corps finis, [illegible] de doubles flèches, (mais pas des objets finals) et $V \cap W$ est l'ouvert de $X_{car\, 0} \simeq \widehat{R}_{Q}$ correspondant à ~~l'anneau nul~~ l'objet (initial?) de R_Q.

Donc OK

NB $X_{car>0} \simeq \widehat{R}_{(car>0)}$, $R_{car>0}$ sous-cat. pl. de R des idéaux [illegible] = Somme amalgamée des $R_{Z/pZ}$ (en [illegible]) sur $\emptyset_R \to R_{Z/pZ}$

[illegible] (marginal notes)

48

$X_{cag} \simeq \widehat{R_{ca}}$, où R_{ca} est la catégorie somme amalgamée des K_p (p fini [illegible]) sous $\phi_{S} \longrightarrow R_p$ [illegible] les préfaisceaux [illegible] de type fini sur un corps premier ($\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{Q}$)

21) Anneaux [illegible] avec propriétés précises

~~21)~~ Rc NB On peut reprendre maintenant toutes les notions [illegible] dans 1) à 19) en ces données de propriétés [illegible] ~~plus gén., si on se donne pour~~ tout p (fini ou infini) un sous-topos $Z(p)$ de $\widehat{R_p}$, on trouve comme topos [illegible] correspondant le topos somme de ceux des $Z(p)$ tels que $\phi_p \notin Z(p)$ i.e. l'anneau [illegible] pour [illegible] type $Z(p)$, et des 2 sommes amalgamées sous le topos ponctuel des autres $Z(p)$ [munis de leur sous-topos ouvert ϕ_p]. Il y a assez de pts ssi chacun des $Z(p)$ en a assez

22) Anneaux [illegible] connexes de rang $\leq n$ (ainsi le spectre a au plus n comp. connexes, donc [illegible] somme d'au plus n schémas connexes)

A Df On peut trouver loc. une décomposition en produit $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, avec les A_i connexes $\Longleftrightarrow$ on peut trouver loc. des projecteurs e_i ($1 \leq i \leq n$) orthogonaux de somme 1, avec $A_j = A/\sum_{j \neq i} e_j A$ connexe pour tout $1 \leq j \leq n$.

$\Pi_n \subset A^n$ $\hookrightarrow e_1, \dots, e_n$ avec
$\begin{cases} e_i^2 = e_i \ \forall i \\ e_i e_j = 0 \ \forall i,j \ i \neq j \\ \sum e_i = 1 \end{cases}$

$A \times \Pi_n \downarrow A_{\Pi_n}$

$A_j = A_{\Pi_n} / \sum_{j \neq i} e_j A_{\Pi_n}$ $\Big|$ $\Pi_n \amalg \Pi_n \to \Pi(A_j)$ (proj. de A_j)

Π_n

soit $\Pi_{n_j} \subset \Pi_n$ plus grand ss-objet [illegible] connexes avec [illegible] changement de base donné

49

(22 juin)

~~Soit~~ $\Pi'_n = \bigcap \Pi_{n_j}$, et $e'_n = \mathrm{Im}(\Pi'_n \to e_\Sigma)$. La condition est que $e'_n \hookrightarrow e_\Sigma$ est un iso, i.e. $\Pi'_n \to e_\Sigma$ un épi. Il n'est pas clair a priori que la formation des e'_n commute avec changement de type de base $\Sigma' \to \Sigma$, car ce n'est pas clair pour la formation de Π_{n_j}. Donc il n'est pas clair qu'on a un type modulaire / ~~[illegible]~~,

Mais, prenons d'abord le cas [illegible] que des anneaux qui sont de plus de rapport tout. Alors on voit que localement le choix des e_i est bien déterminé, ~~à cet près~~ à permutation près, et de plus que si ~~on a un~~ on désigne localement par I ou les e_i qui sont $\neq 0$ alors ~~la décomposition~~ les e_i sont tous différents (Cela par ce, $e_i = e_j$ entraîne $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j (= e_i^2) = 0$ implique que $e_i = 0$!) Si on se borne par [illegible] au cas où $n = m$, on trouve que ~~le choix des~~ le faisceau des choix possibles ~~des~~ des e_i est un pseudo-torseur sous le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$; dire ~~que~~ ~~c'est~~ A est fini connexe de rang tout (ce qui implique, par définition, à rapport ~~fini~~ tout). ~~[illegible]~~

lemme à vérifier

Je ne sais si les pseudo-torseurs commutent à ~~chgt~~ $\Sigma' \to \Sigma$ de base, mais les torseurs oui, si on se borne aux Σ munis de A qui sont connexes de rang constant. Or la donnée d'un tel revêtement : la donnée

a) d'un $\mathfrak{S}_{n,\Sigma}$-torseur P sur Σ i.e. d'un morphisme $\Sigma \to B_{\mathfrak{S}_n}$ (un plongement $\Sigma \to \hat{R} = B$),

b) d'une ~~dé~~composition de A_P en produit $\prod_{1\le i\le n} A_i$ avec les A_i connexes (préc. à rapport tout), et avec compatibilité entre celle-ci et l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Cela signifie qu'on a le torseur P (i.e. p), des anneaux connexes ~~[illegible]~~ à rapport tout A_i $1\le i\le n$ sur P, et ~~[illegible]~~ action de $\mathfrak{S}_n$ sur P permutant entre eux les A_i suivant des actions sur les indices.

50

M plat est-il une propriété typique [elle est stable par lim filtr et par chgt de base ?]

$N \mapsto M\otimes N$ exact

$\forall$ $f_1 \dots f_n$ sections de A sur U,

$(\sum f_i A)\otimes M \to M$ injectif

Il suffit de l'exiger pour les sections universelles, i.e. $U_n = \dots$

$(\sum t_i A_{U_n})\otimes M_{U_n} \to M_{U_n}$ injectif.

$U_n = A^n$

$M \to M_i$ $\quad M \to M_i$

$Y \leftarrow Y_i$ $\quad A \to A_i$ $\quad N$ plat

$Y \leftarrow X$ $\quad Z$, N plat $\quad B$

M fid plat : pour tt $N \neq 0$, $M\otimes N \neq 0$

est-ce typique ?

E Λ

F

E_Λ

$\underline{\mathrm{Modpf}}(A)$ champ des modules de p.f. sur A

$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Modpf}}(A), \underline{\mathrm{Fl}}(E))$ Catégories des hom de Ch ... des

les objets

$E \to F$ hom. de champs continus

$M \mapsto X$

d'où A_F $\quad \mathbb{R}$

Algèbres
de t.f.
p.f.
lisses
étales
nettes
pas typiques
lien ... aux ...

Coïncidence avec Algèbres qui ont déjà de p.f. On voudrait "le voulu" plates lisses etc.

Cela se fait-il par une 2ème ... ??

radicielles / monomorphiques OK pr. ...
surjectives ?
plates OK / fid plates
formellement lisse
— net
— étale OK
entières OK
homéo. universel

51

propriétés non typiques (pour types) (absolues pour anneaux)

{ artinien, noethérien, de t.f. sur $\mathbb{Z}$ (ou sur $\mathbb{Q}$, ~~[illegible]~~ ou $\mathbb{Z}_{S^{-1}}$ ...)
{ n composantes connexes
{ n composantes irréductibles

Propriétés relatives d'anneaux

Anneaux plongeables dans des corps : il faut qu'ils soient intègres, (voir anneau intègre universel...) mais ce n'est pas suffisant si l'on tolère des superpositions. Pour l'anneau intègre universel, les sections locales qui sont partout non nulles (donc qui sont A-régulières) sont celles qui sont inversibles : l'anneau total des fonctions est égal à A lui-même. Une condition nécessaire pour qu'un ~~[illegible]~~ Anneau se plonge $X \to Y$ dans un corps, c'est que les sections nulles (dans les autres sections) soient sommande direct de A, et c'est sans doute suffisant

Modules sur anneaux

$X_{mod} = \widehat{Mod^{\circ}_{pf}}$

Mod_{pf} = catégorie des modules de prés. finie sur $\mathbb{Z}$-algèbres de prés. finie

$Mod^{\circ}_{pf} \simeq$ ~~[illegible]~~ schémas affines sur schémas affines de t.f. sur $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} M & \to & N \\ | & & | \\ A & \to & B \\ F & & G \\ Y & \leftarrow & X \end{array}$$

{ Localement libre
{ libre, projectif / injectif (?)
{ localement libre de rang n
{ libre de rang n (n ≥ 1)
de t.f.
de prés finie
monogène

ne passant pas à 2 limites ... donc pas typiques

~~[illegible]~~

M inv. $\Leftrightarrow M \otimes_A \underline{Hom}_A (M, A) \xrightarrow{\sim} A$ n'est pas exprimable par lims / en commutant à un chgt de base

$\exists\, M \otimes N \simeq A$ ~~$X \mapsto M \otimes X$~~ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$T_M T_N \simeq id$

$T_N T_M \simeq id$

donc T_N, T_M des opérations ~~[illegible]~~

donc M et N plats. $M = \varinjlim M_i$, les M_i de t.f., ... $M_i \otimes N \to A$ ..., donc $M_i \otimes N = A$ pour i grand, ... $M_i = M$, donc M de t.f. ~~[illegible]~~ N pareil. ~~[illegible]~~ est monogène

52

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

53

Catégories $\underline{\mathrm{Ind}}_\pi(C)$ (C petite) et ~~$\mathrm{Ind}_\pi(C)$~~ $\mathrm{Fil}^\pi(\mathrm{Ind}_\pi(C))$

un satisfaisant seulement L_π ?

Th. E ~~catégorie~~ un catégorie [stable par petites $\varinjlim$?]. Conditions équivalentes

a) E π-accessible

b) E équivalente à une catégorie $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ petite

c) La sous-catégorie E_π des E formée des objets π-accessibles est équivalente à une petite cat. et elle est strictement génératrice.

~~détermine une filtration ordinale~~, pour $\pi' \geq \pi$ ~~[illegible]~~.

Sous ces conditions, ~~[illegible] filtration ordinale~~ on a $E_{\pi'} \cong \mathrm{Ind}_\pi(E_\pi)_{\pi'}$, et les $(E_{\pi'})_{\pi' \geq \pi}$ forment une filtration ordinale. ~~filtration~~ Pour la filtration ordinale ($\mathrm{Fil}^\pi)_{\pi \geq \pi_0}$), on a

$\mathrm{Fil}^{\pi'}(E) = E_{\pi'}$ $= \mathrm{Ind}_\pi(C)_{\pi'}$ (pour π' grand),

dès $E \simeq \mathrm{Ind}_\pi(E_\pi)$, $F \simeq \mathrm{Ind}_\pi(F_\pi)$ pour $\pi \geq \pi_0$

Cor Soient E et F deux catégories accessibles, (~~Alors~~ $f : E \to F$ un foncteur. Alors conditions équiv.

a) f est ~~[illegible]~~ accessible ~~[illegible]~~ b) $\exists\ \pi$ tel que $f \simeq \mathrm{Ind}_\pi(f_\pi)$, où $f_\pi : E_\pi \to F_\pi$ un foncteur. ~~[Pour que pour π convenable, il suffit que f soit π-accessible]. Pour que~~ que f soit π-accessible et envoie E_π dans F_π]. c) $\exists$ une petite sous-catégorie pleine C de E, $i : C \to E$ telle que f soit dans l'image essentielle de $i_!^F$: ~~b) Pour un π, [illegible]~~ $\underline{\mathrm{Hom}}(C, F) \to \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$.

Corollaire Sous [illegible], f π-accessible. Alors ~~[illegible]~~ $\exists\ \pi_0$ tel que $\pi \geq \pi_0 \Longrightarrow f(E_\pi) \subset F_\pi$.

Corollaire (E π-accessible, F quelc. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)_\pi \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}(E_\pi, F)$ p. fid. chose une équivalence de catégories ~~[illegible]~~ F satisfait L_π avec petites $\varinjlim$.)

Th Soit C une catégorie accessible. Alors

8.13.2 (+ 8.12.8.1)

a) (Ens univers) les foncteurs contravariants $C^\circ \to$ (Ens) représentables sont ceux qui commutent aux petites $\varprojlim$

b) Un foncteur covariant ~~de~~ $C \to$ (Ens) est pro-représentable (représentable) ~~ssi il est accessible et~~ s'il est exact à gauche (comp. commute aux petites $\varprojlim$) et accessible

Corollaire Soient $f : C \to C'$ un foncteur, avec C accessible, stable par petites $\varprojlim$.

a) f admet un adjoint : ~~[illegible]~~ ssi f commute aux petites $\varinjlim$

b) f admet un ~~[illegible]~~ pro-adjoint ~~[illegible]~~ (comp. un adjoint) ssi il est exact : (comp. commute aux petites $\varprojlim$) quand est accessible.

Th. a) Soit $E \to B$ une catégorie fibrée, avec B équiv. à une ~~petite~~ petite catégorie, les catégories fibres accessibles, les foncteurs changement de base accessibles. Alors $\varprojlim E/B$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_B(B, E)$

9.22 sont accessibles. En particulier, si $\mathcal{C}$ accessible et I équiv. à une petite catégorie, $\underline{\mathrm{Hom}}(I, C)$ est accessible, ainsi que la sous-catégorie pleine des foncteurs qui transforment les flèches en des iso.

: voilà → b) Même hyp. sur E, B. Alors $\varinjlim E/B$ est accessible.

54

55 Ref à SGA 4 I

<u>Catégories accessibles</u>

~~Catégorie filtrante~~ Ensemble ordonné grande devant π. Conditions L_π, L } 9.1 : 9.3

Foncteur π-accessible, accessible

Objet π-accessible, objet accessible d'une catégorie.

(modifié 9.4) Catégorie π-accessible : Satisfait L_π, et admet une petite sous-catégorie (str.) génératrice ~~telle que~~ dont les objets sont π-accessibles

accessible : $\exists\, \pi$ tel que C π-accessible

(cond. 6 [illegible] [illegible] E stable par petites lim, [illegible] catégories [illegible] $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ avec C petite ...)

9.6 <u>Prop</u> ~~[illegible]~~ $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_\pi$, F satisfaisant L_π

a) stable par $\varinjlim$ qui sont représentables dans F

b) Si F π-accessible (pratiquement) alors pour les catégories I avec card $\mathrm{Fl}(I) \leq \pi$ et les lim de type I repr. dans F, $\underline{\mathrm{Hom}}(\ ,\ )_\pi$ stable par $\varprojlim$ corresp.

~~[illegible]~~

<u>Cor 1</u> Cas accessible

<u>Cor 2</u> ~~[illegible]~~ Si F est (pt) π-accessible, ~~[illegible]~~ pour tout $\pi' \geq \pi$, $E_{\pi'}$ est stable par $\varprojlim$ de type I, avec card $I \leq \pi'$. [Les objets accessibles de F stables par petites $\varprojlim$]

<u>Cor 3</u> Si E est accessible, tout objet de E est accessible.

Réciproque partielle : b) :

9.11 <u>Prop</u> ~~[illegible]~~ E catégorie satisfaisant les conditions L et : ~~a) E admet une petite sous-catégorie str. gén.~~

a) E stable par noyaux de doubles flèches, et Ker est accessible (p. ex. commutant aux petites $\varinjlim$ filtrantes)

b) E stable par produits fibrés (E admet une pet. ss-cat. str. génératrice, et génératrice pour épim. stricts universels (p. ex

c) [~~Toute~~ E admet une petite sous-catégorie ~~[illegible]~~ famille épimorphique ~~[illegible]~~ stricte est épimorphique stricte universelle ~~[illegible] : les familles épimorphiques strictes sont épimorphiques strictes ; p. ex. si les familles épimorphiques sont épimorphiques strictes~~]

Alors E est accessible (i.e., en pensant à a)) tout objet de E est accessible

~~[illegible]~~

<u>Cor</u> E catégorie stable par petites $\varprojlim$, ~~et telle que les familles épimorphiques strictes est épimorphiques strictes universelles.~~

Conditions équivalentes

a) E est accessible

b) E admet une petite sous-catégorie ~~str.~~ génératrice ~~[illegible]~~ (pour épim. str. universels) (E stable par petites $\varinjlim$) et le foncteur Ker sur la catégorie des doubles flèches de E est accessible.

[<u>NB</u> E accessible $\Rightarrow$ { $\underline{\mathrm{Hom}}(C,E)$ accessible pour les petites catégories C] ; $\exists$ (E π-accessible) E_π petite sous-catégorie gén. pour épim. stricts universels]]

<u>Ex</u>. ~~Dans~~ Un topos, ~~[illegible]~~, une catégorie ~~[illegible]~~ à $\varinjlim$ filtrantes exactes et : petite famille génératrice ~~[illegible]~~, sont des catégories accessibles. Mais $(\mathrm{Ens})^\circ$ et $(\mathrm{Ab})^\circ$ ne sont pas accessibles, p. ex. ~~[illegible]~~ parce que dans ces catégories ~~[illegible]~~ ~~il n'y a pas de sous-catégorie génératrice pour épimorph. stricts universels~~ Ker n'est pas accessible [i.e. le foncteur Ker dans Ens°, $(\mathrm{Ab})^\circ$ ne commute pas aux produits quelconques : une $\varinjlim$ grande devant π d'épim n'est pas nécessairement un épim.]

<u>Filtrants cardinaux</u> d'une catégorie E ~~[illegible]~~ [illegible] $\mathrm{Fil}^\pi(E)$, $\pi \geq \pi_0$

a) les $\mathrm{Fil}^\pi(E)$ équivalents à petite catégorie

b) ~~Fil~~ E satisfait L_{π_0}, Fil^π stable par $\varinjlim$ filtrantes ~~grandes~~ avec I grand devant π_0 et card $I \leq \pi$

9.12. (Conditions c) renforcée) c) Si $\pi' \geq \pi \geq \pi_0$, tout élément X de $\mathrm{Fil}^{\pi'}$ est de la forme $\varinjlim_{i \in I} X_i$, $X_i \in \mathrm{Fil}^\pi$, I grand devant π, card $I \leq \pi'$

$C \xrightarrow{\varphi} E$ $\qquad \mathrm{Hom}_E(\varphi(Y), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(Y, {}^a\varphi(X))$

$E \xrightarrow{{}^a\varphi} \hat{C}$ $\qquad$ ~~[illegible]~~

$\hat{E}$, φ^* $\qquad$ ~~[illegible]~~

Si dans E $\exists$ (petites) limites inductives, on a aussi :

$\bar{\varphi} : \hat{C} \longrightarrow E \qquad \bar{\varphi}(F) = \varinjlim_{C_{/F}} \varphi(X)$

le domaine de φ é[illegible] à celle de $\bar{\varphi}$ commutant aux petites $\varinjlim$

$$\mathrm{Hom}_E(\bar{\varphi}(F), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(F, {}^a\varphi(X))$$

Conditions équivalentes

a) $\forall X \in E$, $\varinjlim_{Y \in C/X} \varphi(Y) \xrightarrow{\sim} X$

b) ${}^a\varphi : E \to \hat{C}$ —— pl. fidèle

On dit alors que φ est strictement générateur.

b′) (si E stable par (petites) $\varinjlim$) $\hat{C} \to E$ un foncteur de localisation [ou seulement : un. surj.]

c′) (si E stable par (petites) $\varinjlim$ filtrantes, et les $C_{/X}$ ($X \in \mathrm{Ob}\,E$) filtrants ; p.ex. C stable par $\varinjlim$ finies et φ exact à g.) : $\tilde{\varphi} : \mathrm{Ind}(C) \to E$ induit par $\bar{\varphi}$ est un foncteur de localisation

c) Si φ admet un ind-adjoint, i.e. ${}^a\varphi$ prend ses valeurs dans $\mathrm{Ind}(C)$) i.e. ${}^a\varphi : E \to \mathrm{Ind}(C)$ est pl. fidèle.

d) (Si φ admet un adjoint à droite ψ, i.e. ${}^a\varphi$ prend ses valeurs dans C) ψ est pl. fidèle

d′) ~~[illegible]~~ (φ f.) ($\bar{\varphi}$ condition) φ est un foncteur de localisation.

e) (Si φ pl. fidèle) $\varphi(C)$ est générateur dans E par épim. stricts.

f) Pour toute catégorie F stable par petites $\varinjlim$, désignant par $\underline{\mathrm{Hom}}'(E, F)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}$ formée des foncteurs qui commutent aux petites $\varinjlim$, le foncteur restriction

$$\rho_F : \underline{\mathrm{Hom}}'(E, F) \to \underline{\mathrm{Hom}}(C, F)$$

est pl. fidèle

~~g) Avec les notations précédentes, le foncteur~~ ~~[illegible]~~

g) (Si C stable par $\varinjlim$ finies, et φ y commutant) (et est pl. fid.) le foncteur ρ_F précédent induit une équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}'(E, F)$ et la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(C, F)$ formée des $f : C \to F$ qui commutent aux [illegible] induites dans E qui [illegible] dans F

~~[illegible] C stable par lim finies [illegible] des petites lim, les [illegible] filtrantes existent, φ est exact~~

h) (Si E un topos, C stable par $\varprojlim$ finies, φ exact à g.) φ définit E comme un sous-topos de $\hat{C}$.

56

~~[illegible]~~

[illegible] $E \subset \hat{C}$

[illegible]

57

E catégorie. Conditions équivalentes

a) ~~Il existe une~~ E est stable par petites $\varinjlim$ et admet une petite catégorie pleine de générateurs

a') E est stable par petites $\varinjlim$, et il existe une petite catégorie C et un foncteur $\varphi : C \to E$ de générateurs

a'') Il existe une petite catégorie C, et un foncteur pleinement fidèle $E \to \hat{C}$ qui admet un adjoint à gauche $\hat{C} \to E$.

[Dans une telle catégorie, les foncteurs (contra) dans (Ens) qui commutent aux petites $\varprojlim$ sont représentables, donc il existe dans E des petites $\varprojlim$, et dans a''), le foncteur $E \to \hat{C}$ y commute, i.e. E s'identifie à une sous-catégorie stable par $\varprojlim$ de $\hat{C}$. Si E est accessible [ce qui ne semble pas par les conditions équivalentes a) ...], alors ~~[illegible]~~ les foncteurs $E \to \hat{C}$ a un adjoint à g ssi il est accessible et commute aux petites $\varprojlim$]

Question. Une catégorie satisfaisant les conditions a) est-elle accessible, i.e. ses éléments sont-ils accessibles? Comme, sous les conditions de a''), $\hat{C}$ est accessible, on voit qu'il (faut et) suffit que le foncteur $E \to \hat{C}$ soit accessible, on ce qui revient au même, qu'il existe un cardinal π tel que E soit stable dans $\hat{C}$ par $\varinjlim$ filtrantes grandes devant π.

Contre-exemples (Ens)° elle [illegible] a des [illegible] et [illegible] ... (cardinal ≥ 2) [illegible] accessibles [illegible] [illegible]!

Exemples a) Topos ~~[illegible]~~ (c') équivalent à topos

b) T(Ens), T une structure algébrique définissable par petites $\varprojlim$

c) $T(C)$, si T est comme dans b), et C une catégorie accessible

~~[illegible]~~

Conséquences: 1) Si $T \to T'$ est un hom. de structures algébriques, d'où $T(C) \to T'(C)$ foncteur accessible entre catégories accessibles, commutant aux $\varprojlim$ petites, donc $\exists$ adjoint à gauche (structures T'-T-libres)

2) Si $C \to C'$ foncteur accessible commutant aux pet. $\varprojlim$ entre cat. acc., $T(C) \to T(C')$ est accessible commutant aux petites $\varprojlim$, donc $\exists$ adjoint à g...

À prouver: Si C_0, C'_0 accessibles, alors la ss-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^*(C^0 \times C'^0, \mathrm{Ens})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(C^0 \times C'^0, \mathrm{Ens})$ formée des bifoncteurs qui commutent aux $\varprojlim$ petites en chaque argument, ($\simeq \underline{\mathrm{Hom}}'(C^0, C') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}'(C'^0, C)$, où $\underline{\mathrm{Hom}}'$ désigne les foncteurs qui commutent aux petites $\varprojlim$) est accessible, et des foncteurs commutant aux $\varprojlim$ $C_1 \to C$, $C'_1 \to C'$ définissent un foncteur accessible entre les $\underline{\mathrm{Hom}}^*$. Or il est assez clair que plus généralement, si D (variété) stable par petites $\varprojlim$ (et toutes foncteurs qui y commutent ... Δ)

$\underline{\mathrm{Hom}}^*(C^0 \times C'^0, \Delta) \simeq T_{C^0} T_{C'^0}(D) \simeq T_{C'^0} T_{C^0}(D)$ est une "théorie algébrique", définie par $(C * C')^0$ [$C * C'$ universel pour "accouplements" $C \times C' \to C''$ commutant aux $\varprojlim$ en chaque argument....]

58

59

Lemme C une petite catégorie, π cardinal, $E = \mathrm{Ind}_\pi(C)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des syst. inductifs (indexés par des ens. ordonnés) grands devant π. Alors

(i) E satisfait L_π (est une U-catégorie aussi), et l'inclusion $E \to \mathrm{Ind}(C)$ est π-accessible.

(ii) Les objets de E qui sont π-accessibles sont ceux qui sont isom. à des facteurs directs d'objets de C (donc forment une petite catégorie équivalente à l'enveloppe karoubienne de C, compte tenu que $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ est stable par facteurs directs, cf (ii)]. En particulier, si C est karoubienne, ~~les objets π-accessibles de E~~ ce sont les objets de C.

(iii) C est strictement génératrice dans E

(iv) Pour tout objet X de E, C/X est une catégorie (petite) filtrante grande devant π

~~Corollaire~~

Réciproquement: Soit E une catégorie (π un cardinal petit). Alors E est $\cong$ à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}(C)$ (C petite), ssi il satisfait les conditions suivantes

(i) E satisfait L_π (et une U-catégorie)

(ii) La sous-catégorie E_π de E formée des objets π-accessibles est ~~petite~~ petite, et strictement génératrice

(iii) Pour tout objet X de E, la catégorie E_π/X est filtrante et grande devant π.

NB La condition (iii) est ~~vérifiée~~ conséquence de (i),(ii) si E stable par petites $\varinjlim$ (alors E_π est stable par $\varinjlim$ de cardinal $\leq \pi$)

~~Soit π' un cardinal, et~~

Remarque: $\mathrm{Ind}_\pi(C)$, soit π' un cardinal $\geq \pi$, et soit $\mathrm{Ind}_\pi(C)_{\pi'}$ $(= \mathrm{Fil}^{\pi'}(E))$ la sous-catégorie str. pleine de $\mathrm{Ind}_\pi(C)$ formée des ind-objets indexés par des I tels que a) I grand devant π b) ob I ~~contient~~ ensemble cofinal de cardinal $\leq \pi'$. Alors

en particulier, tout objet de E est accessible

a) Les objets de $\mathrm{Ind}_\pi(C)_{\pi'}$ ($\mathrm{Fil}^{\pi'}(E)$) dans E sont (à isom. près) π'-accessibles: $\mathrm{Fil}^{\pi'}(E) \subset E_{\pi'}$

b) Si π' est de la forme 2^c ($c \geq \pi$), alors la réciproque est vraie, i.e. $\mathrm{Fil}^{\pi'}(E) = E_{\pi'}$ ($\pi' \geq \pi$)

c) La filtration de E par les ~~Ind_π(C)~~ $\mathrm{Fil}^{\pi}(E)$ ($\pi' \geq \pi$) est une "filtration cardinale" au sens où si E stable par petites $\varinjlim$, i.e. E stable par $\varinjlim$ de card $\leq \pi$ (Si E est stable par petites $\varinjlim$)

Pour tout ... $\mathrm{Fil}^{\pi'}(E) \neq E_{\pi'}$

Prouver c) avant b)

~~d) Pour tout cardinal π' ≥ π, (E_π')_{π' ≥ π} forment une autre filtration cardinale.~~ E est équivalente à $\mathrm{Ind}(E_{\pi'})$.

d/ Si E stable par $\varinjlim$, pour tout cardinal $\pi' \geq \pi$, $E \cong \mathrm{Ind}(E_{\pi'})$. | ou = égalité si E stable par $\varinjlim$ | cf SGA4 I 9.16 page 2

résulte de la réciproque plus haut

Axiome (?) des filtrations cardinales
Pour $(\mathrm{Fil}^{\pi'})_{\pi'}$

$\forall \pi' \geq \pi$ Tout $X \in E$ est de la forme $\varinjlim_{J \in ?} X_j$, $X_j \in \mathrm{Fil}^{\pi'}$, J grand devant π', et si $X \in \mathrm{Fil}^{\pi''}$, on peut prendre card $J \leq \pi''^{\pi'}$ (il suffit $\pi'' \geq 2^{\pi'}$, [illegible]) $(= \pi''?)$

$$X = \varinjlim_{I} X_i \qquad X_i \in C$$

I grand devant π

Soit I' l'une des sous-catégories pleines filtrantes de I ~~grandes devant π~~, telles que card(Ob I') $\leq \pi'$, [illegible]. Pour tout tel I', soit $X_{I'} := \varinjlim_{i \in I'} X_i$. (Ils sont dans $E = \mathrm{Ind}_\pi(C) \subset \mathrm{Ind}(C)$)

Je dis que J est filtrant et grand devant π'. En effet, si $(I_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille de sous-catégories de I, ~~grandes devant π~~, de cardinal $\leq \pi'$, avec card $\Lambda \leq \pi'$, la réunion des I_α est de cardinal $\leq \pi'$, et est donc contenue dans une sous-catégorie filtrante de cardinal $\leq \pi'$; soit I'. ~~Montrons que I' peut être pris grand devant π.~~ D'autre part

$$X = \varinjlim_{I' \in J} X_{I'}$$

(les $X_{I'}$ dans $\mathrm{Fil}^{\pi'}$, J grand devant π'). Enfin, si $X \in \mathrm{Fil}^{\pi''}$, on peut prendre I tel que card $I \leq \pi''$, donc card $J \leq \pi''^{\pi'}$.

~~Axiome des filtrations cardinales pour 2 filtrations [illegible]. On est ramené à prouver que si $X \in \mathrm{Ob}\, E_{\pi''}$, alors $X = \varinjlim_{J} X_j$, $X_j \in \mathrm{Ob}\, E_{\pi'}$, J grand devant π', card $J \leq \pi''^{\pi'}$ sans difficulté. Or $X = \varinjlim_{J} X_j$, $X_j \in \mathrm{Fil}^{\pi'}(X) \subset E_{\pi'}$, J grand devant π', donc tout revient à prouver que si $X \in \mathrm{Ob}\, E_{\pi''}$, on peut prendre card $J \leq \pi''^{\pi'}$. On [illegible] $\pi'' \geq \pi'$, Soit (SGA 4 I 9.1b) [illegible] $\varinjlim \subset \mathrm{Fil}$~~

~~Cor. Supposons que / Pour~~

Cor Soit E une U-cat. telle que pour petites lim. Pour que E soit équivalente à $\mathrm{Ind}_\pi(C)$, avec C petite, [illegible] par lim de card $\leq \pi$, il faut et il suffit que E admette une petite catégorie strictement génératrice formée d'objets accessibles.

Ce n'est que E qu'il faudrait appeler "accessible"

60

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

Dém Soit π un cardinal tel que les objets de C soient π-accessibles. Il reste à prouver que la sous-catégorie E_π de E formée des objets π-accessibles est équivalente à une catégorie petite. ~~Or~~ Or C stable par limites inductives finies (si non on suppose C équivalente petite) Soit X un objet π-accessible, on a alors $X = \varinjlim_{C/X} Y$, et C/X est filtrante. ~~Soit J l'une des~~ on a donc aussi $X = \varinjlim_{I} X_i$, où I est un ensemble ordonné filtrant, les $X_i \in C$ sous-~~catégories~~ ensembles ordonnés filtrants I_J de C/X de cardinal ≤ π, alors J est ~~filtrant et~~ grand devant π, et on a

$$X = \varinjlim_{j\in J} Y_j \qquad Y_J = \varinjlim_{I_J} Y_i$$

Comme X est π-accessible, ~~il faut que ce soit~~ l'identité $X \to \varinjlim_{j\in J} Y_j = X$ se factorise par un $Y_{j'}$, donc X est isomorphe à un facteur direct d'un $Y_{j'}$. Donc les objets π-accessibles sont isomorphes à un facteur direct d'un objet de la forme $\varinjlim_{i\in I} Y_i$, où I est un ensemble ordonné (ou catégorie) de card. ≤ π, les Y_i dans C.

~~$X_{i,n} \to X_i$, $X_{i,n}$, $Y_{j,m}$~~

~~Trouver que on a prouvé que pour les cardinaux π tels que les objets de C soient π-accessibles, E_π est l'ensemble des facteurs directs des ~~systèmes~~ limites inductives filtrantes $\varinjlim_I Y_i$, les $Y_i \in C$, card I ≤ π, ~~...~~ (C stable par lim finies)~~

On va en conclure que X est limite d'une telle limite, on en conclut que la catégorie filtrante C/X admet un ensemble cofinal de card ≤ π. ~~...~~

Je dis que la sous catégorie F^π_π de E formée des $\varinjlim_{i\in I} Y_i$, avec $Y_i \in C$, I ens. ordonné tel que card I ≤ π, est stable par lim de cardinal ≤ π. Il suffit de prouver que c'est stable par facteurs directs (Car on a prouvé alors que $F^\pi = E_\pi$, cf. ... SGA4 I 9.9. Donc il suffit de prouver que c'est stable par lim filtrantes dénombrables (disons) ......

61

Compléments

(1)

Pb Pour $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ et $I \xrightarrow[\text{cat. discr.}]{} R$, caractériser la situation où cela correspond à une famille d'objets de base (indexée par I) pour une théorie algébrique T_R. (Il y a une caractérisation constructive transfinie : R est l'aboutissement d'une suite transfinie de catégories R_α sur R, faisant un (pseudo) système inductif ~~de catégories~~ dans Δ, avec

(1) $R_0 = I$

(2) $R_{\alpha+1}$ déduit de R_α soit en rendant inversible un petit ens. de flèches
soit en ~~adjoignant~~ adjoignant des conoyaux de flèches
soit en ajoutant un petit ens. de flèches

(3) $R_\alpha = \varinjlim_{\beta<\alpha} R_\beta$ si α ordinal limite.

Condition nécessaire (?) : la sous-catégorie pleine de R [illegible] ... I ... suffisante (?) [illegible]

NB 1 ~~[illegible]~~ la considération des R non petits se pose seulement si (d', d'') n'est pas "petit", ou du moins se ramène à un ens petit ...! Néanmoins, même si (d', d'') petits, la question de caractériser les $I \to R$, à partir d'une construction transfinie, se pose.

Dans la définition récurrente des théories algébriques, ~~[illegible]~~ (cas d')), il faut admettre des $\varprojlim_{\alpha}$ sur des ens. bien ordonnés....

Il faudrait néanmoins prouver que si on a des $I \to R_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) satisfaisant la condition envisagée (disons "I Δ-engendre R_λ") alors il en est pareil pour $I \to R$, où R est la 2-somme amalgamée des R_λ sous I dans Δ.

NB 2 Soit $\mathbb{I}$ la (petite) sous-catégorie pleine de R engendrée par les objets $\in I$ et les (images dans R) sources et buts de toutes les flèches rajoutées au cours du procédé dans la construction transfinie. Il est plausible que $\forall C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $\mathrm{Hom}_\Delta(R, C) \xrightarrow{\simeq T_R(C)} \underline{\mathrm{Hom}}_{Cat}(\mathbb{I}, C) \simeq \mathrm{Hom}_\Delta(C\tilde{\mathbb{I}}, C) = T_{\tilde{\mathbb{I}}}(C)$ est pleinement fidèle. Or $T_{\tilde{\mathbb{I}}}$ est une théorie algébrique. Il est plausible dès lors que ~~[illegible]~~ T_R se déduit de $T_{\tilde{\mathbb{I}}}$ ~~par~~ en rajoutant seulement des axiomes. Mais il ne suffit peut-être pas de le faire en une

62

seule fois, mais qu'il faille souvent une construction transfinie.
Il y a donc des énoncés possibles pour caractériser les $R \subset \mathrm{Ob}\,\Delta$ tels que T_R soit une théorie algébrique (+ des Σ' de couples de flèches de $\tilde{J}$)

1) $\exists$ petite catégorie J, et ensembles Σ, ~~Σ'~~ de flèches de $\tilde{J}$, tels que R se déduit de $\tilde{J}$ en rendant inv. les flèches de Σ (et égalisant couples de flèches de Σ')

2) ~~$\exists$ petite catégorie J, et~~ $\exists$ pseudo-suite transfinie (R_α) dans Δ, telle que

(i) $R_0 = \tilde{J}$, J petite cat.

(ii) $R_{\alpha+1}$ se déduit de R_α en rendant inversibles un groupe de flèches, et égalisant un autre groupe de couples de flèches

(iii) $R_\alpha = \varinjlim_{\beta < \alpha} R_\beta$ si α ordinal limite

(iv) $R_\alpha = R$ pour α assez grand, $\alpha \in U$ (à l'univers)

② Autre Pb : caractériser les théories algébriques par des propriétés intrinsèques (plutôt que par "construction" via une suite transfinie de constructions, ou la représentabilité par un R tel que ...). La seule condition (probablement pas suffisante) que je voie est : T commute aux 2-limites projectives de Δ, i.e. : T transforme ~~[illegible]~~ pl. fid. (fid.) en iso, $\underline{\mathrm{Hom}}_{Cat}(J, C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{Cat}(TJ, T(C))$ ...

③ Conditions ~~[illegible]~~ d'existence généralisées (comme suggérées par Schanuel) : on donne ~~[illegible]~~ $\rho \to \sigma$ dans R et on demande sur C que $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(\sigma, C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(\rho, C)$ soit une équivalence (resp. pl. fidèle, resp. fidèle ...). Cela inclut p. ex. rendre des flèches égales (resp. seulement inv.) les remarques sur l'existence de $\varinjlim$ et $\varprojlim$ dans Δ ainsi construit rendent applicables.

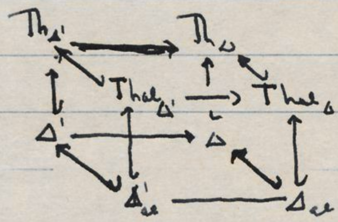
63

④ Changement de $\Delta \subset \Delta'$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Thé}_{\Delta'} \arrow[r, hook, "\text{restriction}"] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & \mathrm{Thé}_{\Delta} \arrow[d, phantom, "\cup" description] \\
\mathrm{Théo}_{\Delta'} \arrow[r, hook, "\text{restr.}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|" description] & \mathrm{Théo}_{\Delta} \arrow[d, phantom, "\wr\|" description] \\
\Delta'_{al} \arrow[r] & \Delta_{al}
\end{tikzcd}$$

2-foncteurs
$\Delta' \cap \Delta^{\circ}$-multiples
C'est défini ainsi
$\Delta' \to \Delta$

$\rho_{\Delta',\Delta}$



64

Existence de $\varprojlim$ ou $\varinjlim$ dans $T(C) \xleftarrow{} \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R,C)$, pour T L-représentable.

Soit δ un type de diagrammes, tel que

a) Les $\varprojlim$ (finies) de type δ existent dans C

b) Les $\varprojlim$ de type δ commutent, ~~pour les~~ dans C ~~fibrés~~, aux $\varinjlim$ de type d (i.e. aux $\varinjlim$ de type d")

Alors les $\varprojlim$ de type δ existent dans $T(C)$, et se calculent sur $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R,C)$ "argument par argument" (en d'autres termes, les foncteurs $r_C : T(C) \to C$ associés aux T-constructions, commutent aux $\varprojlim$ de type δ)

De plus, pour un hom de théories types $T \to T'$, $T(C) \to T'(C)$ commute aux $\varprojlim$ de type d. Et pour $C \to C'$, C' satisfaisant les mêmes hyp. que C, $T(C) \to T(C')$ commute aux $\varprojlim$ de type d.

On a, pour $R, C \in \Delta$, et $J \in$ Cat

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(J, C) \in \Delta$ (au moins si J petite)

$\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(J,C)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(J, \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R,C))$

d'où

$$\boxed{T_R(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(J,C)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(J, T_R(C))}$$

Faisons p. ex. $C = (\mathrm{Ens})$ (supposant $(\mathrm{Ens}) \in \Delta$!), J remplacé par J°

$$T_R(\hat{J}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(J^\circ, T_R(\mathrm{Ens}))$$

Si $C \to C'$ est Δ ens pl. fidèle (resp. fid.) alors $T(C) \to T(C')$ l'est aussi (pour T L-repr.). Si $T \to T'$ est associé à $R' \to R''$ "Δ-générateur" (tel que, donc, the sous-catégorie pleine $\in \Delta$ de R' par laquelle se factorise soit ~~dans~~ $\cong R$] alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \hookrightarrow & T(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T'(C) & \hookrightarrow & T'(C') \end{array}$$

est 2-cartésien

65

[Cas particulier où $T' = \tau^I$ ....]

66

$d'' = \emptyset$: structures alg. définies seulement par $\varprojlim$: faits particuliers :

1°) $\exists \varprojlim$ quelc. dans les $T(C)$, les $T(C) \to T(C')$ y commutent, de même les $T(C) \to T'(C)$ (T, T' 2-repr.), ainsi que les $T(C) \to C$ (foncteurs construction).

2°) $C \to \hat{C}$ est un Δ-foncteur, ~~...~~ (si $(\mathrm{Ens}) \in \mathrm{Ob}\,\Delta$) donc on trouve que (si T 2-repr. par R)

$$T(C) \longrightarrow T(\hat{C}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(C^\circ, \underbrace{T(\mathrm{Ens})}_{S}))$$

est pl. fidèle, et identifie $T(C)$ à la sous-catégorie str. pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(C^\circ, S)$ formée des $\varphi : C^\circ \to S$ tels que, pour toute construction $r \in R$, $\tilde{r} \circ \varphi : C^\circ \to (\mathrm{Ens})$ soit repr. (d'où $\tilde{r} : S \to (\mathrm{Ens})$), Et il suffit d'exiger cette condition pour ces r_i qui Δ-engendrent (i.e. ... un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(C^\circ, T(\mathrm{Ens})) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \mapsto (\tilde{r}_i \circ \varphi) \\ C^I & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(C^\circ, (\mathrm{Ens}))^I \end{array}$$

67

Donc T est connu (à isomorphisme unique près) quand on connait S et les $v_i : S \to (\varinjlim)$ [et on connait alors $\simeq$ T sur $\tau^I \ldots$], ou de façon plus intrinsèque, si on connait l'image de R dans $\underline{\mathrm{Hom}}(S, \varinjlim) = \widehat{S^\circ}$.

3° Or on a $S \cong \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, (\varinjlim)) \subset \widehat{R^\circ}$, et cette sous-catégorie contient R° [car les foncteurs cov. représentables contiennent R en tant que commutant aux $\varinjlim$!] donc on a

$$\boxed{R^\circ \xrightarrow{i} S}$$

et le foncteur $F : S \to (\varinjlim)$ associé à un $r \in \mathrm{Ob}\, R$ est le foncteur qu'il représente dans S. Ainsi R est connu quand on connait son image dans $\underline{\mathrm{Hom}}(S, \varinjlim) = \widehat{S^\circ}$, car $R \to \underline{\mathrm{Hom}}\ \widehat{S^\circ}$ est le composé $R \xrightarrow{i^\circ} S^\circ \to \widehat{S^\circ}$ de deux foncteurs pl. fid.

Ainsi $S = T(\varinjlim)$ est muni d'une sous-catégorie st. pleine Σ, ($\cong R^\circ$) [formée des $\varphi \in \mathrm{Ob}\, S$ tels que pour $\forall C \in \mathrm{Ob}\, \Delta$ et tout $\xi \in T(C)$, définissant $\tilde{\xi} : C^\circ \to S$, le composé $x \mapsto \mathrm{Hom}(\varphi, \tilde{\xi}(x))$ de C° dans Ens soit représentable] (d'où un foncteur $T(C) \to$ ... C), la sous-catégorie Σ est stable dans S par $\varinjlim$ (...) de type Δ, ~~etc pour tout~~ On trouve ainsi une équivalence explicite entre Σ° et R.

4° Soit ~~...~~ Θ l'une de toutes les petits diagrammes, Δ_0 l'une des catégories des toutes les catégories où les $\varinjlim$ de type Θ existent, Supposons que dans la définition de Δ ne figurent que des conditions de finitude, de sorte que $\Delta_0 \subset \Delta$. ~~Dans~~ le théorème $T = T_R$ pour Δ définit une théorie pour Δ_0, dont nous allons montrer la 2-représentabilité. ~~Soit $C \in \mathrm{Ob}\, \Delta_0$~~, on a Si c'est représentable, on

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_0}(R, C) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\varinjlim}(R^\circ, C^\circ)^\circ$$

suit que la catégorie R_0 qui représente ... une catégorie avec ~~lim~~ $\varinjlim$ quelconques, ~~...~~ et

68

69

Exemples

(1) $d' = d'' = \emptyset$. ~~Alors~~ a) Prenant $\Delta = (\mathrm{Cat}_d)$, les Pbs 1) et 2) ont une solution évidente resp. bien connue. Les théories algébriques sont exactement celles qui sont représentables par des petites catégories. Les $I \to R$ génériques sont ~~…~~ tous les ens. surjectifs.

$\rho = \left[\begin{smallmatrix} a & \xrightarrow{u} & b \end{smallmatrix}\right]$ où on rend u inversible

b) Cas des catégories. On peut par exemple prendre $\Delta = (\text{gr.-poïdes})$. Lors ~~…~~ Pb 1 a une solution connue (gr.-poïde fondamental d'une catégorie), le Pb 2) est trivial. Les théories alg. sont celles repr. par des petits ~~…~~ groupoïdes. Les $I \to R$ génériques sont les ens. surj.

$\rho = \left[\begin{smallmatrix} a & \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} & b \end{smallmatrix}\right]$ où on rend u égal à v

c) Prenons $\Delta = (\text{catégories ordonnées})$. Pb 1 a une solution évidente (~~catégorie~~ ens. préordonné associé à une catégorie), Pb 2 une solution facile. Les théories algébriques sont ~~repr.~~ celles par petits ens. (pré)ordonnés. Les $I \to R$ génériques sont ens. surjectifs.

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

(2) d' = tous les "petits" diagrammes, $(d''=\emptyset)$ Pas de conditions d'exactitude.

Pb 1 I une petite catégorie, on a pour $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(I, C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, C^\circ)^\circ \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta^\circ}(\widehat{I^\circ}, C^\circ)^\circ \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(\widehat{I^\circ}; C)$$

sauf taille près.

donc I a la Δ-enveloppe $\tilde{I} = \underline{\mathrm{Hom}}(I, C)^\circ$ (qui est l'opposé d'un topos). Notons que $I \to \tilde{I}$ définit les objets de I comme famille cogénératrice (donc $I^\circ \to \tilde{I}^\circ$ comme famille génératrice).

Pb 2 $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $\Sigma \subset \mathrm{Fl}\,C$ [Σ petit]. Rendre inversibles les éléments de Σ!

~~Supposons que~~ Or $C\Sigma^{-1}$ (au sens de Cat) est défini, moyennant qu'il y ait une solution. On peut supposer que Σ est stable par composition, par chgt de base, contient les isom, et tel que $vu \in \Sigma, u \in \Sigma \Rightarrow v \in \Sigma$. Mais alors Σ donne lieu à un "calcul de fractions", et il est connu que dans $C\Sigma^{-1}$ les types de petites lim qui existent dans C existent dans $C\Sigma^{-1}$, et $C \to C\Sigma^{-1}$ y commute. Il reste à examiner les produits (infinis). Pour ceci, on peut supposer aussi que Σ est stable par produits, puis on complétera. Mais alors on voit tout de suite que les produits de C sont des produits de $C\Sigma^{-1}$. OK!

Σ un ens. plus petit après saturation!

Mais il faut savoir que la catégorie obtenue est une U-catégorie!

Notons que si I est une famille "cogénératrice par mon strict" dans ~~Dans~~ tout C [pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,C$, $X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{X/C} X'$], alors il en est encore de même dans $C\Sigma^{-1}$. ~~Donc on voit~~

Supposons qu'on ait un système inductif filtrant (R_α) dans Δ, avec $I \to R_\alpha$ cogénératrice. Soit $R = \varinjlim_{\alpha}{}_{\Delta} R_\alpha$. Alors $I \to R$ est-il cogénérateur? Soit $R' = \varinjlim_{\alpha}{}_{\mathrm{Cat}} R_\alpha$. ~~Donc~~ ~~$R'$, les lim prennent des objets~~ Donc R s'obtient à partir de R' en rendant inversibles certaines flèches, dans $\mathrm{Ob}\,R' = \bigcup_\alpha \mathrm{Im}\,R_\alpha$. De ceci on déduit aussitôt ce que j'ai dit.

Mais attention, le fait d'être strictement cogénératrice n'est pas transitif

Il faut aussi étudier le cas où on "rajoute des flèches" à R muni de I, d'où $R \to R'$. Ce foncteur est ess. surjectif, et ce que on veut!

70

passe bien dans la construction transfinie par RCMb

Th. Les théories algébriques sur Δ sont celles qui sont représentables par des $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ admettant des petites familles strictement cogénératrices. Pour que $I \xrightarrow{p} R$ ~~soit surjective~~ soit Δ-bonique, il faut et il suffit que son image soit strictement Δ-cogénératrice (c'est plus faible que strictement cogénératrice!).

La nécessité dans la première assertion est claire par ce qui précède. Pour la suffisance, ~~on peut supposer~~ elle résulte de la deuxième assertion. Or soit I' la catégorie munie d'un foncteur pleinement fidèle $I' \to R$ telle que $\mathrm{Ob}\,I' = I$, $\mathrm{Ob}\,\varphi = \varphi$. Considérons. On ~~alors~~ sait que $T_{\tilde{I'}}$ est une théorie algébrique de base I. Or $\widehat{I'^0} \to R^0$ puisque $p : I' \to R$ est surjectif et surjectif sur les Hom, donc $\tilde{I'} \to R$ aussi. Donc il ~~suffit de~~ reste à rendre égales des flèches, donc rendre certaines flèches des iso.

Remarques ① On obtient ici de la construction de la théorie algébrique en les étapes suivantes : 1°) libre de base I 2°) rajouter des flèches 3°) axiomes d'égalité sur des couples de flèches (on a maintenant $T_{\tilde{I'}}$), 4°) ~~axiomes~~ on rend inversibles des flèches ~~d'égalité sur d'autres flèches~~, ou encore.

On peut d'ailleurs condenser 3° et 4°) en une seule étape, (au lieu de faire les choses successivement on a à faire tout une seule fois, grâce au calcul des fractions) donc on obtient R ~~par~~ comme catégorie de fractions de $\tilde{I'} = \widehat{I'^0}$ (dans une approche des topos) par un ens. de flèches satisfaisant les conditions de saturation déjà dite.

② Soit $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$. Les catégories quotients $R' \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ déduites de R ~~par~~ en rendant inversibles des flèches ~~qui~~ correspondent 1-1 aux ens. de flèches Σ telles que

a) Σ stable par ~~composition~~ composition, par changement de base, contient les iso

b) Σ stable par produits quelconques.

③ Supposons que R ait une petite famille cogénératrice I. Alors ~~les~~ $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(R, \mathrm{Ens}) \simeq R^0$ [les foncteurs de R

71

dans (Ens) qui commutent aux $\varprojlim$ sont les foncteurs représentables)
i.e. si $T = T_R$, où $R = S^\circ$, où $S = T(\mathrm{Ens})$. ~~Ce la prouver~~

~~Donc, Pr...~~ On aurait $R^\circ = S$. Donc :

Ces ~~les~~ 2-catégories structures algébriques définissables par $\varprojlim$ (sans existence d'exactitude) ~~correspondent aux catégories~~ 2-équiv. par $T \mapsto T(\mathrm{Ens})$: celle des catégories S avec $\varprojlim$ finies et ~~familles~~ familles-ens. génératrices par épi. stricts [i.e. telles que $S \to \hat{S}^\circ$ soit conservatif]. La donnée d'une telle équivalence de T équivaut à celle d'une famille d'objets cogénératrice de S.
Pour toute $C \in \Delta$, on a

$$T(C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(S^\circ, C)$$

L'équivalence est obtenue en notant que le deuxième membre est formé des foncteurs tels que $\forall X \in C$, le composé avec $\underline{\mathrm{Hom}}_C(X, -)$ est représentable, donc le deuxième membre ~~est~~ peut s'interpréter comme les foncteurs $S^\circ \times C^\circ \to (\mathrm{Ens})$ qui sont représentables par chaque argument fixé, ou aussi les foncteurs $C^\circ \to S$ qui sont tels que pour tout $Y \in S$, le composé avec $\mathrm{Hom}(Y, -)$ soit représentable.
On a

$$T(C) \to \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, \underbrace{T(\mathrm{Ens})}_{= S}) = \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, S)$$

déduit de $C^\circ \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(C, \mathrm{Ens}) \subset \hat{C}^\circ$ induisant $C^\circ \to \underline{\mathrm{Hom}}(T(C), T(\mathrm{Ens}))$
i.e. $T(C) \to$ ~~$T(C)$~~ $\underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, T(\mathrm{Ens})))$.

~~Ex~~ (4) Comme $S = T(\mathrm{Ens})$, a des $\varprojlim$ finies, et $S \in R^\circ$, R a aussi des $\varprojlim$ finies, donc S et R ont toutes les $\varprojlim$ et $\varinjlim$

(5) Soit un foncteur $\varphi : R \to R'$ entre objets de Δ. Si R a une petite famille cogénératrice, alors φ est un Δ-foncteur, i.e. commute aux $\varprojlim$, ssi il admet un adjoint à gauche ψ

$$\mathrm{Hom}(y', \varphi(x)) \simeq \mathrm{Hom}(\psi(y'), x)$$

Alors φ est un proj. à une sous-catégorie de foncteurs [illegible] (et alors R' a une p. famille cog.).
~~R' est une sous-catégorie ψ est~~ pl fidèle, (~~Ainsi les sous-catégories~~ théories de la th. algébrique R correspondent ~~aux~~ à ~~certaines~~ sous-catégories pleines de R, savoir celles qui sont des $\varprojlim$ et telles que les foncteurs d'inclusion ψ ont un adjoint à droite. En termes de $S = R^\circ = T(\mathrm{Ens})$, et $S' = R'^\circ = T'(\mathrm{Ens})$ ~~sous-catégo-~~

ainsi les Δ-foncteurs $\varphi : R \to R'$ (i.e. $T' \to T$) correspondent aux foncteurs $\psi : S' \to S$ (i.e. $\bar{\psi} : R' \to R$) ayant un adjoint [illegible]

$S' = R'^0$ $\quad$ $S = R^0$

~~mais~~ $\varphi : T'(\varprojlim) \to T(\varprojlim)$ est simplement des foncteurs associés : $T' \to T$ déduits de φ. Ce foncteur doit donc commuter aux $\varprojlim$ quelc. [donc ce qui exprime simplement que φ commute aux $\varprojlim$, ou c'est un adjoint à g.) $\varinjlim$,) Donc les sous-théories de T correspondent aux sous-catégories pleines S' de S, [stables par $\varprojlim$, en un certain sens pour les autres [illegible]] admettant des lim quelconques (mais pas nécessairement stables par ces dernières) et telles que le foncteur d'inclusion $S' \xrightarrow{i\,(=\varphi^0)} S$ ait un adjoint à gauche $g\,(=\varphi^0)$

$$\mathrm{Hom}_S(x, i(y')) \simeq \mathrm{Hom}(gx, y')$$

~~Alors ... des foncteurs adjoints quelconques~~

~~[Mais en général, ... (Structure)~~ (S' (foncteur S'-structure "lim" définie par une S-structure) Mais en général, il n'y a pas moyen de définir pour tout $C \in \mathrm{Ob}\,A$ un foncteur $T(C) \to T'(C)$ qui le redonne ... pour $C = (\mathrm{Ens})$ [NB Cependant, si C est un topos, et si T, T' et φ se définissent au site des lim finies, c'est OK ....]

NB La 2-catégorie des théories algébriques sur $\mathcal{U}$ est 2-équivalente à la 2-catégorie des cat. S qui sont stables par petites lim ~~quelc.~~ et qui ont une petite sous-catégorie str. génératrice, avec les foncteurs qui commutent aux $\varprojlim$ (mais ne conservant pas forcément les monomorphismes ?). ~~Cela revient à dire les catégories telles~~ ~~que les foncteurs qui transforment lim ...~~

73

(3) ~~d'~~ d' ~~famille de diagrammes~~ (quelconques) finis, $d' = \emptyset$, par des conditions d'exactitude. ~~[illegible]~~ ~~les [illegible]~~ Soit d_0 l'un de tous les diagrammes finis, d_1 l'un de tous les petits diagrammes, et $\Delta \supset \Delta_0 \supset \Delta_1$ les [illegible] correspondantes.

Pb 1 Δ-Karoubien $f_\Delta(I)$ d'une catégorie I. Soit $\bar{I}$ ~~[illegible]~~ $\simeq \hat{I}^\circ$ la Δ_1 enveloppe, et soit $\tilde{I}$ la ~~sous~~-catégorie pl. de $\bar{I}$ formée des lim des types d' d'objets de I [AB $I \to \tilde{I}$ pl (f.d. !)]. Je dis que cela marche, pourvu qu'on sache que $\tilde{I}$ est stable par d' (c'est le cas si d' = ens. des diagrammes finis discrets, ou d' = ens. de tous les diagrammes finis (?)) sinon on doit prendre ~~[illegible]~~ pour $\tilde{I}$ la plus petite sous-catégorie st/pleine de $\bar{I}$ contenant I et stable par lim de type d'. En effet, on a pour $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(I, C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_1}(\bar{I}, \bar{C}),$$

~~et~~ foncteurs (et [illegible]) l'image formée des foncteurs $\bar{I} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{C}$ tels que $\bar{\varphi}(I) \subset$ ~~[illegible]~~ C (ens.). Mais ~~[illegible]~~ soit $\rho(C)$ la Δ-Δ_1 enveloppe de C i.e. la Δ_1-catégorie $\bar{\varphi}'(C)$ Δ-foncteur $C \xrightarrow{i} \rho(C)$ universel [c'est une catégorie [illegible] de foncteurs de $\bar{C}$]. ~~Admettons que~~ ~~$I \to C$ se prolonge en foncteur~~ pleinement fidèle (Pb auxiliaire) ~~En effet, via les foncteurs~~ Alors les foncteurs $\varphi\ I \to C$ ~~définis, via $i\varphi$~~ "= à" les foncteurs $\psi = i\varphi : \bar{I} \to \rho(C)$ qui envoient I dans l'image essentielle de C par i, on a aussi les foncteurs $\bar{\varphi} : \bar{I} \to \rho(C)$ tels que $\bar{\varphi}(I)$ soit contenu dans l'image essentielle de C; de tels $\bar{\varphi}$ envoient $\tilde{I}$ dans C d'où

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(I, C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(\tilde{I}, C),$$

et on a un foncteur "restriction" en sens inverse. Il est clair que les composés dans les deux sens sont l'identité, OK.

Pb 1' Un Pb auxiliaire Si $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, montrer que $C \to \rho(C)$ est pl. fidèle. Je dis qu'on a

$$\rho(C) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C, \mathrm{Ens})^\circ = J_C(\mathrm{Ens})^\circ,$$

Pb 1 et Pb 1' Cela marche pour tous, d' de petits diagrammes (Cas [illegible] finis)

74

le foncteur $C \to \rho(C) = \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathrm{Ens})^\circ = \widehat{C^\circ}$ ~~étant~~ [illegible] associant : tout objet de C le foncteur covariant qu'il représente (alors il est clair que $C \to \rho(C)$ est pl. fidèle !). On a en effet, si D est une ~~catégorie où les lim [illegible] [illegible], et si $\rho(C)$ est défini pour le~~ $\Delta - \Delta_1$ [illegible]

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C, D) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta_1}(\rho(C), D) \simeq$ [illegible] $\rho(C) \cong T_{\rho(C),\Delta_1}(\mathrm{Ens})^\circ$

$\cong T_{C,\Delta}(\mathrm{Ens})^\circ = \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C, \mathrm{Ens})^\circ$: OK.

<u>Pb 2</u> $C \in \Delta$, $\Sigma \subset Fl$, construire $C\Sigma^{-1}$ <u>dans Δ</u>, et dans [illegible] [illegible] donne [illegible] ens. de couples de flèches qu'on veut égaliser. ~~[illegible] bien [illegible]~~ Soit $\rho(C,\Sigma)$ la Δ,Σ-catégorie de ~~[illegible]~~ fractions de $\rho(C)$, définie par Σ, et soit C' la plus petite sous-Δ-catégorie (th. pleine) de $\rho(C,\Sigma)$ ~~qui~~ telles que $C \to \rho(C,\Sigma)$ se factorise par C', i.e. ~~telle que~~ C' contienne la sous-catégorie pleine $C\Sigma^{-1}$. Soit $D \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, alors les Δ-foncteurs $\varphi : C \to D$ correspondent aux Δ_1-foncteurs $\Psi : \rho(C) \to \rho(D)$ tels que Ψ envoie C dans (la ss-cat. pleine) D, et les Δ-Σ-foncteurs "i.e." ~~tels~~ que les foncteurs $\Psi' : \rho(C,\Sigma) \to \rho(D)$ ~~tels que~~ qui envoient C dans D, ~~on [illegible]~~ ce qui revient au même, C' dans D. Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta,\Sigma}(C, D) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C', D)$, et [illegible] le foncteur restriction en sens inverse. Il est clair que les deux composés $\beta\alpha$ [illegible] ~~égaux~~ les foncteurs identiques, et trivial pour $\beta\alpha$, pour $\alpha\beta$ on note que ~~[illegible] β est pl. fidèle~~ OK. C'est déduit de $C\Sigma^{-1} \underset{\text{pl.}}{\subset} \rho(C,\Sigma)$ en rajoutant transfiniment des $\underleftarrow{\lim}$ de type d', et pas ensuite par $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C', D) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C, D)$ est pl. fidèle (car $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(C', D) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{Cat}(C', D)$ l'est ...).

Si Σ contient [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] alors $C\Sigma^{-1}$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] OK. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] discrets.

<u>NB</u> Dans les deux cas envisagés (Pb 1 et Pb 2), la catégorie résultante (de I, resp. de C) se déduit de C sous-catégorie pleine en déf. en rajoutant des $\underleftarrow{\lim}$ de type d' (transfiniment au besoin). On trouve sauf erreur :

il faudrait [illegible] regarder [illegible] $\underleftarrow{\lim}$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

<u>Th.</u> Les théories algébriques de type Δ sont celles qui ont 2-représentées par des $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ ayant une petite sous-catégorie ~~qui~~ I' d'-cogénératrice [i.e. ~~[illegible]~~ R est la réunion d'une suite transfinie de sous-catégories str. pleines de R déduites en rajoutant des $\underleftarrow{\lim}$ de type d']. Une foncteur $I \to R$ (I [illegible]) est basique ssi il est d'-cogénérateur.

75

On est encore ramené à prouver ce dernier énoncé. On procède comme dans 2°, en introduisant la sous-cat. pleine I' de R telle que $\mathrm{Ob}\, I' = I$, d'où $T_R \to T_{\tilde{I}'}$ pl. fidèle. Regardons $\tilde{I}' \to R$, il est ess. ~~surjectif sur les objets et~~ surjectif sur les flèches, ~~[illegible]~~ est-il ess. surjectif ? OK. Si ~~la famille~~ d'~~[illegible]~~ satisfait aux conditions écrites un cran plus haut, car alors on trouve un Δ-foncteur pl. fidèle $\tilde{I}'\Sigma^{-1} \to R$, ~~[illegible]~~

catégorie de fractions localisation

dans un cas ess. surjectif. Donc on trouve

$$\begin{tikzcd} & \tilde{I}' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\ I' \arrow[rr] \arrow[d, hook, "\text{pl. fid.}"'] & & I' \arrow[d, "\substack{\text{ess. surj.}\\ \text{et surjectif sur flèches}}"] \\ R \arrow[rr, hook] & & \rho(R) \end{tikzcd}$$

I' engendre strictement R qui engendre str. $\rho(R)$ donc I' engendre str. $\rho(R)$ (?)

Corollaire (si d'satisfait aux conditions exigées (p. ex. d'sommes de diagrammes finis)) on peut construire des théories algébriques pour Δ en droit pas, comme pour Δ_1 : on prend une catégorie I' ayant I comme ens. d'objets (cf. 1° et 2°) et prend une catégorie de fractions de $\tilde{I}'$.

Mais la ~~[illegible]~~ conclusion est valable si p. ex. d'avoir sommes de diagrammes discrets, stable par passage à une sous-diagramme [illegible] ~~[illegible]~~

Néanmoins, dans le cas d'une dérivateur (~~[illegible]~~ sommes de diagrammes finis) il semble qu'il faille une construction récurrente transfinie

~~[illegible]~~ Question : [Supposons Δ petit.] Alors une R ~~telle que R~~ admettant une petite sous-catégorie Δ-cogénératrice (donc ~~[illegible]~~ correspondant à une théorie algébrique pour Δ) est petite, car ...

76

4°) Cas d'ou [illegible] des diagrammes finis, $d'' = \emptyset$, par des conditions d'exactitude.

Comme Δ est petite, les $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta_0$ qui 2-représentent des th. algébriques sont les R ens. petits (stables par $\varinjlim$ finies). ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} T \text{ théorie algébrique pour } \Delta \\ R \in \mathrm{Ob}\,\Delta \text{ qui représente } T \\ \mathcal{S} = T(\mathrm{Ens}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(R, \mathrm{Ens}) \\ \Sigma \subset \mathcal{S} \text{ (structures représentables)} \end{cases}$$

Tout se détermine mutuellement

R : $T = T_R : C \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(R, C)$

$\mathcal{S} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(R, \mathrm{Ens})$

$\Sigma = R^\circ \subset \mathcal{S}$ par foncteurs repr.

Σ : $R = \Sigma^\circ$

$T : C \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(\Sigma^\circ, C)$

$\mathcal{S} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(\mathcal{S}^\circ, \mathcal{C})$, contient Σ comme sous-catégorie pleine.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Autre façon de déterminer $\mathcal{S}$ de R ou Σ

cf SGA 4 I 8.7.5 ((i) $\Sigma \subset \mathcal{S}$ ... ; (ii) Σ ... ; (iii) Σ ...) [illegible]

<u>Lemme</u> ~~[illegible]~~ L'inclusion $\Sigma \to \mathcal{S}$ définit une équivalence

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) \to \mathcal{S}$$

En effet, ~~[illegible]~~ on sait que $\Sigma \to \mathcal{S}$ est universel pour les foncteurs $\Sigma \to D$

SGA 4 I 8.9.5. [exacts à dr., où D a des $\varinjlim$ quelc. Or montrons que $\Sigma \to \mathrm{Ind}(\Sigma)$ (On sait que $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ a des $\varinjlim$ finies (donc quelc.) car Σ en a, et $\Sigma \to \mathrm{Ind}(\Sigma)$ y commute) est identique. ~~En effet~~ les foncteurs ~~[illegible]~~ $\Sigma \to D$ correspondent

SGA 4 I 8.7.3 aux foncteurs $\mathrm{Ind}(\Sigma) \to D$ qui commutent aux $\varinjlim$.

(ceux qui commutent aux $\varinjlim$ finies étant quelconques)

sont ceux qui, sur Σ, y commutent [nécessité trivial, pour la suffisance, on ~~[illegible]~~ vu que par I 8.9.8 $\mathrm{Ind}(\Sigma) \to \mathrm{Ind}(D)$ ~~commute~~ est exact à droite, ~~[illegible]~~,

or $\mathrm{Ind}\,D \to D$ l'est aussi (c'est un adjoint à g, qui commute à des limites inductives) ok

<u>Corollaire</u> ~~Pour tout~~ Soit $X \in \mathcal{S}$. Pour que $X \in \Sigma$, il faut et il suffit que le foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$ sur $\mathcal{S}$ commute aux $\varinjlim$ filtrantes.

NB Mention pour la catégorie homotopique! cf aussi SGA 4 I 8.7.8

C'est évidemment nécessaire, par construction des Hom dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{S})$.

C'est suffisant, car ~~[illegible] $X \in \mathcal{S}$~~ On aura $X = \varinjlim_i X_i$ ($X_i \in \mathrm{Ob}\,\Sigma$), filtrante, donc le morphisme identique se factorise par un des X_i, donc un des $X_i \to X$ ayant une section, donc X est ~~[illegible]~~ image projective, or Σ est ~~donc~~ stable par [illegible] (c'est un conoyau) ~~et $\Sigma \to \mathcal{S}$ [illegible]~~ OK.]

77

Donc Σ se reconstitue à partir de $\mathcal{S}$ comme ~~l'ensemble des~~ sous-catégorie (stricte) pleine des objets "de présentation finie" !

$\mathcal{S}$: $\Sigma = \mathcal{S}_{PF} \subset \mathcal{S}$

$R = \Sigma^\circ$

$T : C \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(\mathcal{S}_{PF}^\circ, \mathcal{C})$

T : $\mathcal{S} = T(\mathrm{Ens})$

$\Sigma = \mathcal{S}_{PF} = T(\mathrm{Ens})_{FP}$

$R = \Sigma^\circ$

<u>Corollaire</u> Pour qu'une ~~the~~ Δ_1-théorie T/(bonne limite (petite) projective d'une théorie définissable par limites finies, il faut et suffit que $S = \mathcal{S}_T = T(\mathrm{Ens})$ soit ~~engendré~~ strictement engendrée par ses (objets de pr. finies, ou sous-catégorie pleine Σ formée des), ou encore que $\mathcal{S} \to$ ~~Ens~~ $\hat{\Sigma}$ soit pleinement fidèle. (Alors Σ° est la catégorie classifiante pour la théorie sur Δ_0 qui donne naissance à T).

<u>Corollaire</u> Le 2-foncteur de restriction : Δ_1 des théories algébriques sur Δ_0 est 1-fidèle, i.e. pour ~~th~~ deux théories T, T' sur Δ_0, on a $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Th}_{\Delta_0}}(T, T') \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Th}_{\Delta_1}}(T_1, T_1')$ pl. fidèle. L'image essentielle est formée des foncteurs $T_1 \to T_1'$ qui sont tels que $\mathcal{S} = T(\mathrm{Ens}) \, (= T_1(\mathrm{Ens})) \to \mathcal{S}' = T'(\mathrm{Ens}) = T_1'(\mathrm{Ens})$ transforme objets de P.F. en objets de P.F. [On pourrait les appeler les morphismes de prof. finie, ou cohérents, de théories ....].

<u>Question</u> Considérons Δ défini par d' = une des diagrammes finis discrets, $d'' = \emptyset$, pas de conditions d'exactitude. Soit R une petite cat $\in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $\Sigma = R^\circ$ et $\mathcal{S} = T_R(\mathrm{Ens}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{prod}}(R, \mathrm{Ens})$. Peut-il se faire que $L = \mathcal{S}$ soit défini par deux sous-catégories str. pleines ~~essentielles~~ (stables) différentes ? ~~Oui, comme on voit avec~~ Comment trouver les Σ plus minimales, i.e. telles que $\mathcal{S} \cong \int_{\Delta, \Delta_1}(\Sigma)$? On a évidemment $\Sigma \subset \mathcal{S}_{PF} = \Sigma_0$ et $\mathcal{S}_{PF} \cong \int_{\Delta, \Delta_0}(\Sigma)$ (condition néc. et suff.) Donc la question se ramène au problème d'une $\Sigma_0 \in \mathrm{Ob}\,\Delta_0$ et d'une sous-catégorie pleine ~~famille génératrice dans~~ Σ de Σ_0 stable par sommes finies...

78

79

traités [illegible] avec quelques détails

(1) $\varprojlim$ finies, foncteurs exacts
(1') $\varprojlim$ de type d', foncteurs qui y commutent

(1'') Catégories préordonnées avec Inf finis, foncteurs qui y commutent

(2) $\varinjlim$ finies et $\varprojlim$ finies, foncteurs exacts
(2') Prétopos (axiomes "finis" des topos) foncteurs exacts
(2'') Catégories semi-additives, foncteurs additifs
(2''') Catégories additives, foncteurs additifs
(2$^{(iv)}$) Catégories abéliennes, foncteurs exacts
[foncteurs additifs?]

(3) (Cat_d), avec (d', d'') petits

(4) Cat avec $\varprojlim$ finies, $\varinjlim$ filtrantes exactes, foncteurs y commutant
et tout ça
(4'') Cat. préordonnées avec Inf finis, Sup quelconques, ~~qui y~~
Inf distributifs par Sup quelc., foncteurs commutant aux Inf finis et Sup quelc.
(4') $\varprojlim$ finies, $\varinjlim$ quelc., sommes disjointes universelles, $\varinjlim$ filtrantes exactes, foncteurs exacts commutant aux $\varinjlim$
(5) $\varprojlim$ et $\varinjlim$ quelc., foncteurs qui y commutent
(5') Topos
(6') Topos essentiels ($\simeq \hat{C}$, i.e. ayant assez de pts essentiels, i.e. ayant les propriétés d'exactitude (pour $\varinjlim$ et $\varprojlim$) de la cat. des ens)
morphismes essentiels de topos.

Je m'attends à des ennuis (de sortie de l'Univers) ~~aux univers~~ avec (6) et (6')

80

$$\mathrm{Th\acute{e}}_\Delta \underset{\sigma \text{ 2 fidèle}}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \Delta$$

$\rho(T) = \mathcal{B}_T$ cat. des constructions sur T
$= \underline{\mathrm{Hom}}(T, \tau)$

On démontre que $\rho(T) \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ pour tout T, et que si $T \to T'$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(T', \tau) \to \underline{\mathrm{Hom}}(T,\tau)$, $\underline{\mathrm{Hom}}(T', \tau) = \rho(T')$, est un [illegible] de Δ

$$\sigma(R) = (C \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(R, C))$$

On a $\quad \underline{\mathrm{Hom}}(\sigma(R), T) \approx T(R)$

en particulier $\quad \underline{\mathrm{Hom}}(\sigma(R), \tau) \approx \tau(R) = R$, avec $\underline{\mathrm{Hom}}(\sigma(R), \tau) = \rho\sigma(R)$

NB ρ défini en termes des 2-foncteurs $\Delta \xrightarrow{I} (\mathrm{Cat})$
i.e. la 2-catégorie cofibrée [illegible] sur Δ ....

donc $\rho\sigma(R) \approx R$ et σ est 2 fidèle [général dans toute 2-cat.]

~~$\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, R') \approx$~~

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Th}}(\sigma(R), T)}_{\approx T(R)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(\rho(T), \underset{\rho\sigma(R)}{R}) = (\sigma(\rho(T)))(R)$$

$\underbrace{T(R) \times \rho(T) \to R}_{\Delta}$

est-ce une équivalence? Résoudre pour $\forall R$ ses T-repr. par $\rho(T)$

~~$\sigma\rho(T) \to T$ (can à isom unique près)~~

~~$\underline{\mathrm{Hom}}(\sigma\rho(T), T) \approx T(\rho(T))$, peut-on déduire un objet à isom unique près dans $T(\rho(T))$??~~

$$\boxed{T \longrightarrow \sigma\rho(T)}$$

~~C'est le morphisme universel de T dans [illegible] / [illegible] 2-repr. [illegible], $\underline{\mathrm{Hom}}(T, \sigma(R)) \to$~~

81

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

$\Delta \in \mathrm{Cat}_d) \subset \mathrm{Cat}$

Question des générateurs de (Cat)Δ. On ne se donne pas que les objets générateurs de Δ (ou ainsi), mais aussi qui définissent des théories algébriques, ainsi ....

(1) Pour $I \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat})$ (I petit ?), le 2-foncteur

$C \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(I, C)$

est 2-représentable (l'objet qui le 2-représente, soit $\tilde{I}$, est "libre" Δ-engendré de C) : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(I, C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(\tilde{I}, C)$
(i.e. l'inclusion $\Delta \longrightarrow \mathrm{Cat}$ admet un 2-adjoint à gauche)

$I \mapsto \tilde{I}$ est un 2-foncteur $(\mathrm{Cat}) \longrightarrow \Delta$

(2) Pour $J \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ et $\Sigma \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{B})$ (Σ petit), le 2-foncteur

$C \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(J, C; \Sigma)$ = sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(J, C)$ formée des $u : J \to C$ tels que $u(\alpha)$ inversible pour tout $\alpha \in \Sigma$

est 2-représentable (par une catégorie notée $J\Sigma^{-1}_{\Delta}$ ou $J\Sigma^{-1}$).

<u>Conséquence</u> Existence de 2-limites inductives dans Δ, pour un pseudofoncteur

$I \longrightarrow \Delta$

$i \longmapsto A_i$

Soit en effet $D = \varinjlim_{i,(\mathrm{Cat})} A_i$ la 2-limite inductive dans (Cat), avec $A_i \xrightarrow{\alpha_i} D$ dans Cat ; de sorte que pour tout $C \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat})$ et a fortiori $C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(D, C) \xrightarrow{\approx} \varprojlim \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(A_i, C)$$

dans $\underline{L}(C)$, "est" la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(D, C)$ donnée comme $\varprojlim \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(A_i, C))$ des $D \xrightarrow{u} C$ des Cat tels que $\forall i$, $u \circ \alpha_i : A_i \to C$ soit dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(A_i, C)$, on obtient la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(\tilde{D}, C)$ des $\tilde{u} : \tilde{D} \to C$, pour tout i, on ait $\tilde{u} \circ \tilde{\alpha}_i \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(A_i, C)\}$, où $\tilde{\alpha}_i$ est le composé $A_i \xrightarrow{\alpha_i} D \xrightarrow{\mathrm{can}} \tilde{D}$. Or les conditions

82

$\tilde{u} \circ \tilde{v}_i$ sur Δ-foncteurs s'exprime par la condition de rendre inversibles certaines flèches Σ de ~~dans~~ $\tilde{D}$ [dans [illegible] [illegible] que les Δ-foncteurs sont définis par des propr. de commutation à certains types de limites $\longleftrightarrow$ qui existent dans toutes les cat. éléments de Δ]. Je n'ai pas clair [illegible] [illegible] au cas Σ petit (si les A_i ne sont petits ...., ce qui n'est guère le cas que si les [illegible] de [illegible] d'" par [illegible] auxquels on veut parler de $\varinjlim$ et $\varprojlim$ et y compris non petits); donc il faut alors travailler avec des sous-catégories "génératrices" petites, en un sens convenable....

construction des 2-limites dans (Cat): elles sont faites dans SGA 4 VI en prenant la catégorie totale de 2 catégories cofibrées [illegible] en rendant inversibles les morphismes cartésiens.

"Théorie" T sur Δ : 2-catégorie cofibrée sur Δ i.e. 2-pseudofoncteur

$$\Delta \xrightarrow{T} \mathrm{Cat}$$

Ils forment une 2-catégorie

$$\mathrm{Th\acute{e}}(\Delta)$$

Évidemment, on a

$$\tau \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Th\acute{e}}(\Delta) \qquad \tau(C) = C$$

On pose

$$\underline{\mathrm{Hom}}(T, \tau) = B_T$$ catégorie ~~[illegible]~~ des constructions

<u>NB</u> Si T est 2-représenté par $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$

$$T(C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta}(R, C)$$

alors on a [illegible] pour les Théorie T' sur Δ

$$\underline{\mathrm{Hom}}(T, T') \simeq T'(R)$$

83 en particulier $B_T = \underline{\mathrm{Hom}}(T, \tau) \simeq \tau(R) = R$

ce qui explique en particulier que $B_T \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ (si Δ est défini par des propriétés d'exactitude, cela est clair, car dans $B_T = \varinjlim (T, \tau)$ les limites du type i, d'' se construisent argument par argument}. Mais il y a un "effet de sel", c'est qu'il n'est pas clair que B_T soit une U-catégorie.

La description de B_T qu'on a donnée paraît assez brutale, on va définir pas à pas une catégorie B'_T de "constructions explicites" (sic) pour une ~~catégorie~~ théorie algébrique T, quand on construit cette théorie algébrique. Mais on supposera que $B'_T \in \mathrm{Ob}\,\Delta$.

(a) Structure vide sur I objets : correspond à la "théorie" τ^I. Elle est représentable par la Δ-enveloppe $\tilde{I}$ de la catégorie discrète I. ~~Les objets de $\tilde{I}$ sont sans doute obtenus~~ (si Δ défini par cx. d'exactitude) On pose $B'_{\tau^I} = \tilde{I}$. On le justifie [illegible] pour expliciter $\tilde{I}$ par limites du type d à partir des objets i, et des colimites d'exactitude en inversant des flèches grâce aux axiomes d'exactitude.

~~$\tilde{I}$~~

(b) Structure déduite d'une structure T (avec cat. de constructions explicites, B'_T) en ajoutant des axiomes : ~~un ensemble~~ des flèches Σ de B'_T doivent être rendues inversibles. $B'_{T_1} = B'_T\Sigma^{-1}$ (dans Δ)). NB Si on a T est 2-repr. par B'_T, ~~$B'_T \simeq R$~~, T' repr. par B'_{T_1}, ~~[illegible]~~

Rem NB Si on a foncteur fidèle $T \to \tau^I$, le composé $T' \to T \to \tau^I$ aussi, (car $T' \to T$ pl. fid.)

(c) Structure déduite d'une structure T en ajoutant des flèches (nouvelles données) : ~~$\forall x, y \in B'_T$, ens~~ ~~(qui peuvent être vides)~~ On. H un ensemble d'indices, et $H \to \mathrm{Ob}\,B'_T \times \mathrm{Ob}\,B'_T$, $h \mapsto s(h)$, $h \mapsto b(h)$, et on pose

$T'(C) =$ catégorie des objets x de $T(C)$, munis d'une application φ de H dans $\mathrm{Fl}(C)$ telle que $\forall h \in H$
$\varphi(h) : s(h)(x) \to b(h)(x)$

NB On [illegible]

rigidité [illegible]

84

$B'_{T'}$ est obtenu à partir de B'_T en rajoutant les flèches $\mathbf{H}$ — d'une catégorie, par ex. Δ — $\mathrm{Ex}(B'_{T'}, \mathbf{H}, s, b)$ (remplacer d'une catég. diagrammes) et, en prenant 6 Δ-enveloppes, $B'^{\circ}_{T'}$, et en y "rendant inv." (ou dans Δ') les flèches qui expriment que le composé $B_T \xrightarrow[\text{foncteur comme (par ex. un } \Delta\text{-foncteur)}]{} B'^{\circ}_{T'} \xrightarrow[\text{Δ-foncteur}]{} C$ est un Δ-foncteur.

(c) NB Si T repr. par ~~R, ...~~ et $B'_T \simeq R$, alors T' repr. par B' ~~repr. par R' déduit de R = H~~$_R$ $C = H, s_R, b_R$, où s_R, b_R déduits de $s, b : H \to \mathrm{Ob}\, B'_{T'}$, en comp. avec

Rq NB $T' \to T$ fidèle, donc si T a un foncteur fidèle $T \to \tau^{I}$, le composé aussi.

(d) ~~Composition de structures~~ Si Θ_α des théories T_α, avec B'_{T_α}, alors la théorie $T' = \prod T_\alpha : C \to \prod T_\alpha(C)$ est une structure alg. $B'_{T'}$ = 2-somme amalgamée des B'_{T_α} dans Δ.

NB Si les T_α repr. par les B'_{T_α}, alors T' repr. par $B'_{T'}$.

Rq NB Si $T_\alpha \to \tau^{I_\alpha}$ fidèle, alors $T' \to \tau^{I'}$ fidèle, où $I' = \coprod I_\alpha$

produit ensembles dérivation + insuffisant

Si on préfère ne pas dériver en termes de variétés d'objets de base, on compose (resp. ensembles de base fixés)

(d') Composition de structures avec ~~objets~~ Si Θ des théories T_α ~~Effectivement sur τ^I~~ $\varphi_\alpha : T_\alpha \to \tau^{I}$, alors le produit 2-fibré des T_α sur τ^{I}

$$T'(C) = \prod^{(2)}_{\alpha \in C^{I}} T_\alpha(C) \quad \text{~~(fibrés sur~~}$$

On pose $B'_{T'}$ = ~~2-~~somme amalgamée des B'_{T_α} sur $B'_{\tau^I} = \widetilde{I}$.

NB Si les T_α repr. par les B'_{T_α}, T' repr. par $B'_{T'}$.

Rq NB ~~Si~~ On peut vouloir se restreindre aux $T_\alpha \to \tau^{I_\alpha}$ fidèles, alors $T' \to \tau^{I}$ est fidèle.

85

86

On peut passer à l'autre critère

(d'') Lim de théories (sans conditions particulières) ...
⟵ Il suffirait de le postuler une une, d'où des lim ordonnées ...

<u>Remarque 1</u> On ne sait à aucun moment des théories T représentables par B_T, où B_T ~~[illegible]~~ admet une petite famille génér. $I \to \mathrm{Ob}\, R$, i.e. telle que $\forall C \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, C) \to C^I$ fidèle

~~Remarque~~

<u>Remarque 2</u> Soit maintenant $R \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, avec Δ-génér. $I \to \mathrm{Ob}\, R$.
~~On va procéder sur Marisson~~

~~T_0 repr. par $R_0 = \tilde{I}$~~

1°) R <u>petite</u>. On prend $I = \mathrm{Ob}\, R$, par part de

$T_0 = \tau^I$, $B'_{T_0} = \tilde{I} = R_0$

On prend ensuite $H = FC(R)$, qui envoie dans $\mathrm{Ob}\, R_0 \times \mathrm{Ob}\, R_0$

par le composé $H \to \mathrm{Ob}\, R \times \mathrm{Ob}\, R \to \mathrm{Ob}\, R_0 \times \mathrm{Ob}\, R_0$

d'où T_1, R_1 avec $R_0 \to R_1$, $T_1 \xrightarrow{\text{fid}} T_0$ $\left(\overset{I \times I}{}\right)$

On exprime ensuite que les compositions des flèches de R deviennent les comp. des flèches de R_1 i.e. l'application "présentation" $R \to R_1$ devient un foncteur. On trouve ainsi

T_2, R_2, $R_1 \to R_2$, où $R_2 = \tilde{R}$ $(T_2(C) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(R, C))$

On exprime enfin que le foncteur $R \to R_2$ devient un Δ-foncteur, [i.e. commute aux Δ-type de lim] en écrivant que certaines flèches de R_2 deviennent inversibles, d'où

T_3, R_3　　$R_3 = R$.

[On a utilisé 1 fois par a), une fois par c), deux fois par b), et par deux fois d).]

2°) R quelconque, mais avec $I \to \mathrm{Ob}\, R$ "générateurs".
Soit ρ la sous-catégorie pleine de R engendrée par I.
On a $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, C) \xrightarrow{\text{fid}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(\rho_0, C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(\tilde{\rho}_0, R)$
théorie 1°.

~~et puis ite~~ $\tilde{\varphi}$ Considérons $R_0 : \tilde{\varphi}_0 \to R$ et les flèches qui deviennent des isom. par Σ, ~~$\tilde{\varphi}\Sigma^{-1}$~~ soit $\varphi_1 = R_0\Sigma^{-1}$, $R_1 = \varphi_1$

Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}at}(R_0\Sigma^{-1}, C) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R_1, C)$ ... .

$R_1 \to R$. On construit une suite transfinie de catégories $R_\alpha \in \Delta$, et des $R_\alpha \to R$; toutes les théories $\sigma(R_\alpha)$ sont algébriques (le passage aux ~~limite~~ ~~des~~ colimites limites ne fait pas le critère d ... , au choix). On ... (dans Cat)

~~...~~ $\vee$

40) Soit $R \in \mathcal{B}\Delta$, et $\underline{\Gamma} \xrightarrow{u} R$ un foncteur (tel que $\forall C \in \mathcal{B}\Delta$, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R, C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Delta(R', C)$ fidèle (...)). Construisons, dans ... inductif transfini de catégories $R_\alpha \in \mathcal{B}\Delta$, $R_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{C}at)$, tel que les morphismes de transition $R_\alpha \to R_\beta$ soient des Δ-foncteurs, et ~~les morphismes foncteurs~~ en ... 2-ind. ... dans R par des $u_\alpha : R_\alpha \to R$ ($u_\alpha : R_\alpha \to R$) ($\alpha \in \mathrm{Fl}\,\Delta$), en prenant $R_0 = (\underline{\Gamma}, \xi : \underline{\Gamma} \to R$ prolongeant u), $\varphi_0 = R_0$

$R_{\alpha+1} \to R$ (... de $R_\alpha \to R$ en définissant Σ_α = ... des flèches de R_α devenant ... dans R.

$R_{\alpha+1} = \underset{\varphi_{\alpha+1}}{R_\alpha\Sigma^{-1}}$ (au sens de Δ)

$R_{\lim \alpha_i} = \varinjlim_\Delta R_{\alpha_i}$.

Alors pour α assez grand (dans l'univers $\mathcal{U}$) on a $R_\alpha \xrightarrow{\approx} R$.

NB Pour ... limite, ... que $R_\alpha \to R$ ... conservatif ? Si les Δ-foncteurs ~~...~~ ~~...~~ ... (...) ..., cela implique que les foncteurs R_α sont ~~pl. fidèles~~ fidèles, donc les R_α sont des sous-catégories. Pour la condition c, si ... , R_α ... stable par les limites du type $\delta \in d' \ldots \delta'' \in d''$ pour card(δ'), card$(\delta'') \leq c$. Donc si d' et d'' sont ~~petits~~

faut-il ... pl. fidèle ??

prendre ... $R_{\alpha+1}$ = ... dans R de $R_\alpha\Sigma^{-1}$ dans R (... plein de R)

$\varphi_{\alpha+1} \to \varphi_{\alpha+2} \to R_{\alpha+2}$

?

avec la droite ... fidèle ... pour ... $R_\alpha \to R$ ... pour α assez grand ...

87

88

λ ens. de diagrammes finis

R ⊂ Cat_λ ~~sous-catégorie~~

$\Sigma = R^\circ$, $\mathcal{S} = \underline{Hom}_\lambda(R, (Ens)) \subset \hat{\Sigma}$ $\qquad \Sigma \subset \mathcal{S} \subset \widehat{R^\circ} = \hat{\Sigma}$

a) $\mathcal{S}$ admet des $\varinjlim$ quelconques

b) $\mathcal{S}$ est "engendrée" par ses objets "de ~~type~~ présentation finie" [objets X tels que $\underline{Hom}(X, -)$ commute aux $\varinjlim$ filtrantes]

i.e. si $\mathcal{S}_0$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}$ formée de ces objets, alors

$\mathcal{S} \longrightarrow \hat{\mathcal{S}}_0$ [commutant aux $\varprojlim$ quelc. et aux $\varinjlim$ filtrantes]

est conservatif [ou même pl. fidèle ? ou fidèle]

c) $\Sigma \subset \mathcal{S}_0$ et Σ engendre $\mathcal{S}_0$ par $\varinjlim$ finies (resp. engendre $\mathcal{S}$ par $\varinjlim$ quelc.)

d) Plus précisément, $\mathcal{S}_0$ est la catégorie stable par $\varinjlim$ finies enveloppante de la λ-catégorie Σ, et $\mathcal{S}$ est la ~~λ~~-catégorie enveloppante de la $\varinjlim_0$-catégorie $\mathcal{S}_0$.

9. Relation avec "[illegible]" de Lazard.

89

Dictionnaire pour λ quelc. [$= (\lambda_1, \lambda_2)$]

Morphisme de ~~structures~~ types $T_\lambda \to T''_\lambda$	λ-catégorie (admettant petites) familles λ-génératrices
	λ-foncteurs $R^{\sharp} \to R$
Morphisme pleinement fidèle	λ-foncteurs de localisation $R^{\sharp} \to R'$ (p.v. à un ens. de flèches)
Sous-théorie pleine $T'_\lambda \subset T_\lambda$	Ens. de flèches de $R^{\sharp}$ stable par composition, et par λ-limites
Morphisme fidèle $T'_\lambda \to T_\lambda$ ["structure plus riche"]	λ foncteurs $f : R \to R'$ tel que f λ-engendre R' (épimorphisme)
λ-~~structure~~ avec famille d'objets de base (~~sommée~~) $(E_i)_{i \in I}$	λ-catégorie avec famille d'objets $I \to \mathrm{Ob}\,R$ qui λ-engendre R
$\varprojlim$ de λ-théories	$\varinjlim^{(\lambda)}$ de λ-catégories

Dictionnaire (multiples) $\lambda = (\lambda, \emptyset)$

λ-type T	λ-catégorie (admettant) petite famille λ-génératrice	$S\ (= R^0)$ λ^0-catégorie admettant petite famille λ-gén.	Catégorie $\mathcal{T}$ avec $\varinjlim$ filtrantes (et lim. quelc.) munie d'une sous-catégorie génératrice S (pour foncteurs cons.) stable par λ^0 limites formée d'objets de présent. finie (i.e. $\mathrm{Hom}(A, -)$ commute aux $\varinjlim$ filtrantes	Topos B ayant assez de pts, et dont la cat. ... stable par ...
$T(\mathcal{C}) = \mathrm{Hom}_\lambda(R, \mathcal{C}) = \mathrm{Hom}_\lambda(S^0, \mathcal{C}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, ...)$ ($\varinjlim$) (si $\mathcal{C}$ a des lim. quelc.) $=$ sous-catégorie pleine de formée des $u : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{T}$ commutant avec les $\mathrm{Hom}(X, -)$, $X \in \mathrm{Ob}\,S$, représentables $= \mathrm{Hom}_{top}(\mathcal{C}, B)$ (si $\mathcal{C}$ est un topos)	$R = S^0 = \mathrm{Pten}(B)$ $=$ (objets fonctoriels de ...) un vide ... B $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^0, \mathcal{T})$ commutant avec les	$S = R^0 = \mathrm{Fibess}(B) = s$	$\mathcal{T} = \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Ens}) = T(\mathrm{Ens})$ $= \mathrm{Hom}_{\lambda^0}(S^0, \mathrm{Ens})$ ($= \mathrm{Ind}(S)$ si $\lambda_1 =$ tous les diagrammes finis) $\mathcal{T} = \mathrm{Pt}(B)^0$, $S = \mathrm{Pten}(B)^0$ (que l'on tous les diagrammes filtrants ..., B = topos ... par T)	$B = \widehat{R} = \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Ens})$ $(= \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ si $\lambda_1 =$ tous les diag. finis)
morphisme $T' \to T$	λ-foncteur $R^{\sharp} \to R'$	λ^0-foncteur $S \to S'$	foncteurs $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ commutant aux $\varinjlim$ ... ayant un adjoint à gauche dont l'adjoint envoie S dans S' ou : foncteurs $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ commutant aux $\varinjlim$ quelc. et envoyant S dans S'	Morphisme de topos $B' \xrightarrow{f} B^{\sharp}$ tel que f^* transforme objets ponctuels en objets ponctuels

90

morphisme pl. fidèle $T' \to T$	λ foncteur de localisation $R^{?} \to R'$	λ-foncteur de localisation $S \to S'$	foncteur $\tau' \to \tau$ ... pl. fidèle (i.e. foncteur $\tau \to \tau'$ ... de localisation)	Morphisme de topos $B' \xrightarrow{f} B$ ... qui est un plongement i.e. $f_* : B' \to B$ pl. fid.
sous théories pleines des T_λ	Ens de flèches M de R stable par comp. et par λ-ième type [illegible]	Ens de flèches M' de S' stable par comp. et par λ-ième type [illegible]	Sous-catégories pleines $\tau' \subset \tau$ stables par limites projectives (λ-bornées) qui est telle $B\tau'$ = ens des objets X de τ tels que pour tout $u \in$ [illegible] avec (Hom(u, X)) bij. pour tout $Y \in B\tau'$, on ait Hom(u, X) bijectif	Sous-topos B' de B tels que, i.e. $f : B' \to B$ [illegible], f^* transforme objets ponctuels en objet ponctuel déduit par localisation de B par un ensemble de flèches de $R \subset B$ → objets ponctuels
morphisme ~~foncteur~~ fidèle de théories $T' \to T$	$R \to R'$ λ-engendrée R	$S \to S'$ λ-engendrée S'	$\tau' \to \tau$ fidèle (λ-fidèle??) ou $\tau \to \tau'$ λ-engendrée induit $S \to S'$ [illegible]	$f^* : B' \to B$ est fidèle
limites de ← λ-types $(T_\lambda)_i$	limites de λ-cat. R_i	limites de λ°-cat S_i	limites de [illegible] limites catégories τ_i (limites de ...) [illegible] mais [illegible] filtrantes de [illegible] $\lambda =$ [illegible]	limites de ← topos

91

(anneaux locaux ou corps)

Soit T l'espèce de structure "anneau", T' l'espèce de structure "corps". Cette dernière n'est pas définissable par $\varprojlim$ car la catégorie des corps (consistante) n'est pas stable par $\varprojlim$, par ex. par produits finis). Le sous-type plein de T le plus petit qui soit définissable par $\varprojlim$ est ~~caractérisé par les propriétés suivantes : Soit~~ défini par la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ définie par

$C \in Ob\,\mathcal{C}' \Longrightarrow$ Hom. $A \to B$ des (Ens) tels que

$X = \mathrm{Sp}(B) \to Y = \mathrm{Sp}(A)$ soit bijectif : ext. résiduelles triviales, $\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ est bijectif.

Un tel C a la propriété que C est ~~local~~ pseudocorps ($\mathrm{Spec}\, C$ ~~compact~~ réduit de dimension 0, ~~et~~ C réduit $\Longleftrightarrow$ les ~~anneaux locaux~~ anneaux locaux de C des corps) — Les C sont ceux qui transforment en iso l'hom. évident $\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}[x,y]/((xy-1)x, (xy-1)y)$ transformant t en $(t,0)$ resp. en x. [La réciproque qui est vraie, et comme dans la catégorie ~~des~~ $\mathcal{C}'$] est celle des pseudocorps.

[Mais la ~~notion de~~ structure corps peut elle se définir par $\varprojlim$ et $\varinjlim$, du moins dans des catégories satisfaisant des conditions d'exactitude convenables?]

Le sous-objet A^* (des éléments inversibles) d'un objet anneau d'une catégorie $\mathcal{A}$, peut-il se définir par $\varprojlim$ (ou par $\varprojlim$ et $\varinjlim$)? Dans le premier cas, on est ramené au cas de l'objet universel dans $R = (\mathrm{Ann})^0 = (\mathrm{Sch\ aff})^{\circ}$ qui est l'objet $\mathbb{Z}[t]$.

92

de R. ~~[illegible]~~ Or un sous-objet dans R est un ~~objet qui est~~ sous-objet dans (Sch-Aff), ce qui fait $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] = \mathbb{Z}[x,y]/(xy-1)$.

Donc OK. ~~[illegible]~~ avec [illegible] finis

Ceci dit, considérons pour un objet A le morphisme $\coprod A^* \to A$, où [illegible] est l'objet final.

On pourrait dire que A (dans une catégorie avec limites projectives finies) est un objet corps si ce morphisme est un isom.

Plaçons-nous p.ex. dans la théorie des topos. ~~[illegible]~~ Le topos universel (classifiant) pour les anneaux est $\hat{R}$, $CR \simeq$ Sch-Aff. L'objet anneau universel est $O = E^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t])$.

Il faut donc rendre inversible la flèche $\coprod O^* \to O$ (dans R, $\cdot \to O$ n'est pas un épi dans R!) et la flèche ... (dans $\hat{R}$, pas dans R!) utilisée plus haut. (On voit que cela implique que ~~les flèches X → Y dans R qui est un morphisme~~ bijectif en valeurs : ext. résiduelles triviales devient un isom dans le nouveau topos classifiant B'. [comme on voit par notre [illegible]] pour tout $X \subset \hat{R}$ et tout $f \in \Gamma(X, O_X)$,

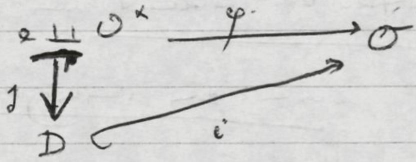
$X \coprod V(f) \to X$ doit devenir un isom, ce disant de la situation précédente par changement de base $X \xrightarrow{f} O = E^1_{\mathbb{Z}}$] Or la catégorie

$O^* \coprod e$

quotient de R par l'une des flèches précédentes (qui maintenant est stable par base) est la catégorie des schémas compact

93

qui sont ~~[illegible]~~ associés à des schémas de t.f. sur Z
[ou encore la catégorie des schémas ~~cont. th.~~ compacts
qui sont ~~th~~ t.f. sur Z] ~~On trouve donc~~
que $B' = \widehat{R'}$
Ainsi, B' Comme ... une factorisation



~~vendre~~ φ inversible revient à vendre D inversible
(car un bimorphisme dans un topos est un iso),
et J inversible. ~~Passons~~ d'abord
vendre
les morphismes i' (opinions dans R) inversibles,
en d'autres, si R' est la catégorie des
fractions de R [i.e. la catégorie des
schémas compacts associés à des schémas de t.f.
d'un Z], on obtient le topos $\widehat{R'}$ (dans fonctions
pour les pseudo-compacts). Il faut ensuite
vendre $e \sqcup O^\alpha \to O$ un monomorphisme i.e.
$e \cap O^\alpha$ vide, or $e \cap O^\alpha \subset R \to R'$ est le
crible formé des schémas vides, représentant le
foncteur ~~(ε ⊂ ...)~~ dans $\widehat{R'}$ $\varepsilon(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } X \neq \emptyset \\ \{e\} & \text{si } X = \emptyset \end{cases}$
donc il faut vendre $\emptyset \to \varepsilon$ un iso.

bimorphisme en iso

sommes disjointes vendues

On trouve si C est une catégorie avec lim
finies et lim quelconques (suffit-il qu'il y ait
lim finies, voire des sommes finies?) ~~[illegible]~~
~~"[illegible]"~~ bimorphismes isos dans C
les "compl" dans C correspondant aux foncteurs
$F : R' \to C$ qui ~~commutent~~ sont exacts à gauche
et commutant aux sommes. Trop

94

la catégorie (avec lim quelc.) universelle pour ceci est la catégorie des faisceaux sur R' pour la top. de Zariski (= foncteurs [illegible] $R \to Ens$ qui transforment sommes en produits). Il se trouve que c'est un topos ⊕ Le corps universel est le faisceau structural évident sur ce topos...

$\bar{M}$ paramétrise [illegible] anneaux intègres. Soit

$O' \subset O$ le sous-topos "qui opère régulièrement sur O", $(O' \supset O^*)$ est-il définissable par $\varprojlim$ et $\varinjlim$? Comment t'il avec [illegible] topos ? ~~O' définissable par [illegible] ? Si O [illegible]~~, cela signifie que le foncteur ~~[illegible]~~ [illegible] qui [illegible]

Dans le cas de l'anneau universel d'un topos, $G \in \hat{R}$, $O'(X)$ est le sous ~~ens. de~~ de $A = O(X)$ formé des $f \in A$ tels que f soit régulier, et la restr. par A dégénère anneau de type fini $A \to A'$ – mais cela ~~signifie~~ implique que $f \notin m$ pour $m \subset A$, $m \neq \emptyset$, donc f inversible. Donc [illegible] $O' = O^*$! Or un foncteur fibre sur $\hat{R}$ est un anneau (arbitraire) et il n'est pas vrai qu'un tel anneau est intègre ssi c'est un corps, donc [illegible] $O'_p = O^*_p$ i.e. $A' = A^*$!

95

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

96

(1)

$\boxed{1}$ Soit (1.1) $\lambda = (\underleftarrow{\lambda}, \underrightarrow{\lambda})$ un couple, où $\underleftarrow{\lambda}$ et $\underrightarrow{\lambda}$ sont des ens. de diagrammes de l'Univers fixé $\mathcal{U}$

On veut préciser la notion de "structure algébrique définie ~~par~~ à l'aide de $\varprojlim$ du type $\underleftarrow{\lambda}$, et $\varinjlim$ du type $\underrightarrow{\lambda}$".
(ou λ-type)

(1.2) $(\mathrm{Cat}_\lambda) =$ 2-catégorie
- objets = $\mathcal{U}$-catégories faisant $\varprojlim$ type $\underleftarrow{\lambda}$ et $\varinjlim$ type $\underrightarrow{\lambda}$ = λ-catégories
- morphismes : foncteurs commutant aux $\varprojlim$ et $\varinjlim$ de type λ : λ-foncteurs
- morphismes de morphismes : comme dans (Cat)

[donc $\mathrm{Cat}_\lambda \hookrightarrow (\mathrm{Cat})$ est 1-fidèle]

Si T est une ~~espèce de structure~~ λ-type, on aura pour tout $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$ une catégorie $T(C)$ des structures de type T dans C, et on obtient ainsi une catégorie clivée sur Cat_λ, notée T_λ

(1.3) T_λ cat clivée sur Cat_λ

Si T' est une autre ~~structure~~ λ-type, on pose

(1.4) $\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(T, T') = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{clivée}/(\mathrm{Cat}_\lambda)}(T_\lambda, T'_\lambda)$

et de cette façon les λ-types forment une (2-cat)

(1.5) $(\lambda\text{-types}) \xrightarrow{\text{2-fidèle}} \text{2-Catcliv}(\mathrm{Cat}_\lambda)$

$\boxed{2}$ Si on se donne T avec un ens. d'indices I, tel que "T structure sur I objets de base", on introduit la théorie τ^I (structure vide sur I ensembles de base) donnant lieu à la catégorie clivée sur $(\mathrm{Cat})_\lambda$ dont les fibres

(2.1) $\tau^I(C) = C^I$

et on trouve pour tout C un foncteur canonique "objets des objets de base" (et transposition)

(2.2) $T_\lambda(C) \xrightarrow{b_\lambda^{C,T}} C^I$ [foncteur 0-fidèle]

définissant pour C variable

97 (2.3) $b_\lambda^T : T_\lambda \to \tau^I$ (0-fidèle)

Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

②

On définit si T' est une = relatif à I

(2.4) $\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(I; T, T')$ = catégorie des [complexes (u, α), avec] morphismes $u : T_\lambda \to T'_\lambda$ ~~et~~ isom. de commutation α

$$\begin{tikzcd} T_\lambda \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b^T_\lambda"'] & T'_\lambda \arrow[dl, "b^{T'}_\lambda"] \\ \tau^I & \end{tikzcd}$$

On a ~~fonct~~ 2-cat.

(2.5) $(\lambda\text{-}I\text{-types}) \hookrightarrow$ $\underline{\mathrm{Cat\,2\text{-}cofib}}(\mathrm{Cat}_\lambda)/\tau^I$

et un 2-foncteur

(2.6) $(\lambda\text{-}I\text{-types}) \to (\lambda\text{-types})$

3 Types et ~~?~~ fidèle.

Si I est réduit à un élément, τ^I est noté τ, donc

(3.1) $\tau(C) = C$

~~La catégorie~~ On pose

(3.2) $\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(T, \tau) \simeq R^\lambda_T$ ~~(?)~~

et l'appelle cat. des λ-constructions pour T. On ~~?~~ ne sait pas à priori si R^λ_T est une $\mathcal{U}$-catégorie. Mais c'est une ~~?~~ λ-catégorie, et les λ-limites se calculent "argument par argument", donc pour toute $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$ et $\xi \in T(C)$, le foncteur

(3.3) $\xi^\lambda_\lambda : R^\lambda_T \longrightarrow C$

~~commute~~ est un λ-foncteur. ~~Notons le foncteur (définissant 3.?) commutant avec un λ-foncteur~~

On a (par définition (3.3))

(3.4) $R^\lambda_T \times T(C) \to C$ pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$

i.e. (3.5) $R^\lambda_T \to \underline{\mathrm{Hom}}(T(C), C)$

Bien entendu, la catégorie R^λ_T dépend de T de façon contravariante // quand I est donné avec T, on a

(3.6) $I \to \mathrm{Ob}\,R^\lambda_T$ (fonctoriel en $T \in \mathrm{Ob}(\lambda\text{-}I\text{-types})$) (équivalent à (2.3))

(3.4) vu comme (2.2), et dans le domaine (i.e. (2.2)) pour tt C.

4 ~~Théorème λ-représentabilité~~ pour avoir

On dit que T est λ-représentable si ~~la catégorie~~ la catégorie 2-cofibrée T_λ sur (Cat_λ) est 2-repr., l'objet R_T qui le représente est appelé catégorie λ-universelle de T : ~~?~~

(4.1) $T(C) \overset{\approx}{\leftarrow} \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R_T, C)$

via une ~~?~~ T-structure λ-universelle

(4.2) $\xi^\lambda_T \in T(R_T)$

Notons aussi, à partir de (3.5), $T(C) \to \underline{\mathrm{Hom}}(R^\lambda_T, C)$,

(3.7) $T(C) \to \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R^\lambda_T, C)$

(3.8) $R_T \to R^\lambda_T$

définissant, par λ-?, $T \to \underline{\mathrm{Hom}}(R^\lambda_T, \ldots)$, et donc (3.7) provenant de $\underline{\mathrm{Hom}}(\ldots) \ldots$ dans Cat_λ

Comme R^λ_T (?) (commutent avec ?) dans la cat. 2-cofibrée (Cat_λ) pour R^λ_T

③

On sait que R_T est défini : équivalence près (unique à isom. unique près), et que pour les catégories cofibrées F sur $(Cat)_\lambda$, on a une équivalence de catégories (unique à iso. unique près)

(4.3) $\underline{\mathrm{Hom}}_{fib/Cat_\lambda}(T_\lambda, F) \cong F(R_T)$

Faisant $F = T'_\lambda$, on trouve

(4.4) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\lambda}(T, T') \cong T'(R_T)$ (unique à iso. unique près)

et faisant en particulier $T' = \tau$, on trouve

$\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(T, \tau) \cong \tau(R_T)$

$\overset{\text{dfn}}{=} R_T^\lambda$ $\quad R_T^{\lambda}\ \overset{\text{dfn}}{=}$ d'où

(4.5) $R_T = R_T^\lambda$ (catégorie des λ-constructions)

~~On écrira donc plutôt~~ R_T ~~ou~~ R_T^λ. Alors (4.1) s'interprète (équivalence près) comme (3.8).

~~Faisant~~ Dans le cas envisagé ici, la cat. des λ-constructions est une $\mathcal{U}$-cat.

Faisant $C = (Ens)$ dans (4.1), on trouve

(4.6) $T(Ens) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R_T^\lambda, (Ens)) = \cancel{(R_T^\lambda)^o}$

[Si T n'est pas λ-représentable, on a seulement

(mod équivalence),

$\boxed{5}$ Je vais préciser quelles sont les catégories

1-cofibrées sur Cat_λ (resp. munies d'une hom. des λ^I_λ)

qui proviennent de ~~théories de~~ "type de structure" – relatifs à λ – dans ~~précise~~ explicitant une définition de la cat. (λ-type) (1.5)

On va d'abord ~~préciser~~ ~~...~~ I est ensemble des λ-types sur I.

On va préciser des règles de formation

a) ~~On a~~ (Structure universelle) pour $I \in \mathcal{U}$, $\tau^I \in$ Ob (λ-type)

b) (Règles de restriction) (extension maximale) Si T est un (λ-type) sur I, et si on se donne une partie A dans $Fl(S^\lambda_{T,I}) \subset Fl(R_T^\lambda)$, alors la sous-catégorie 2-cofibrée pleine de T_A' formée ~~de~~ telle que $T_A'(C)$ (~~C~~ $\in$ Ob Cat_λ) soit formée des $\xi \in T(C)$ tels que (3.2) transforme A en des isom., est un λ-type

On introduit $S^\lambda_{T,I} \subset R_T^\lambda$ la sous catégorie pleine de la catégorie engendrée par λ-type sur I...

NB peut-être faut-il aussi se donner la possibilité d'utiliser des complexes de flèches.....

(5)

sur I

c) (Rajouter des données-flèches) Si T est un λ-Type
et si on se donne ~~sur une partie de~~ petits ensemble B et une application $B \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ob}\, S_{T,I}^{\lambda} \times \mathrm{Ob}\, S_{T,I}^{\lambda}$ ~~[illegible]~~ [Ou encore une famille $B_{\rho,\sigma}$ d'ensembles disjoints et petits, indexée par les couples d'objets de $S_{T,I}^{\lambda}$], alors la catégorie cofibrée sur (Cat_{λ}) suivante est un λ-$\overset{I}{\text{Type}}$:

$$T_{B,\alpha}(C) = \text{catégorie des couples } \left(\xi, (u_{\rho,\sigma})_{\rho,\sigma \in \mathrm{Ob}\, S^{\lambda}_{T,I}}\right)$$

avec $\xi \in \mathrm{Ob}\, T(C)$ et $u_{\rho,\sigma} \in \mathrm{Hom}_C(\rho(\xi), \sigma(\xi))$ $(\forall \rho, \sigma \in \mathrm{Ob}\, S^{\lambda}_{T,I})$

d) (Composition de structures) Si on a une famille $(T_j)_{j \in J}$ de λ-types sur I, J petit, ~~et si on a~~ alors la catégorie cofibrée sur (Cat_{λ}) suivante est un λ-$\overset{I}{\text{type}}$

$$\prod_I \left((T_j)_{j\in J}\right)(C) = \text{2-produit fibré des } T_j(C) \text{ sur } C^I$$

<u>Définition 5.1.</u> La 2-catégorie des $\overset{I-}{\lambda}$-types est, par définition,
la sous-2-catégorie 2-pleine des 2-cofib $(Cat_{\lambda})/_{2}{}^{I}$
~~[illegible]~~ la plus petite [illegible] qui soit stable par
les op a) b) c) d)

<u>NB</u> On peut en donner une construction transfinie.

<u>Question 5.2</u> ~~La 2-catégorie~~ Les $\overset{I-}{\text{cat.}}$ cofibrées sur $(Cat)_{\lambda}$ qui
sont des λ-I-types sont elles exactement celles qui
sont 2-représentables par une $R \in \mathrm{Ob}\, Cat_{\lambda}$, munies
de $I \to \mathrm{Ob}\, R$ telles que ~~[illegible]~~ $\mathrm{Ob}\, R$
soit la plus petite partie de $\mathrm{Ob}\, R$ stable par les λ-limites.

5

5.4. L'inclusion $\subset$

~~Cat~~ se distingue par les questions

a') $\mathcal{I}^I$ est-il représentable par une catégorie R_I (la λ-catégorie libre engendrée par I objets) qui soit λ-engendrée (au sens de (5.3)) par $I \to (I \to \mathrm{Ob}\,R_I)$?

b') Soient $R \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}_\lambda)$, $A \in \mathrm{Fl}\,R$. Y a-t-il une λ-catégorie R_A ($\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$) "universelle" pour rendre inversibles les flèches $\in A$, et R_A est-il λ-engendrée par $I \to R$

cf note avec b)

c') Soit $R \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}_\lambda)$, B un ensemble λ-petit, et $\alpha : B \to \mathrm{Ob}\,R \times \mathrm{Ob}\,R$. Y a-t-il une λ-cat $R' = R_{B,\alpha} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$ universelle munie d'un λ-foncteur $R \xrightarrow{i} R'$ et d'applications $B \to \mathrm{Fl}\,R'$ telle que le composé avec $\mathrm{Fl}\,R' \to \mathrm{Ob}\,R' \times \mathrm{Ob}\,R'$ soit le composé de α avec $\mathrm{Ob}\,i \times \mathrm{Ob}\,i$. De plus, R' est-il λ-engendré par $I \to i$?

d') Soient $(R_j)_{j \in J}$ une petite famille d'objets de (Cat_λ), munie d'applications $I \xrightarrow{\varphi_j} \mathrm{Ob}\,R_j$. Y a-t-il une solution au problème universel d'envoyer les $R_j \xrightarrow{\psi_j} R$, $R \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$, avec ~~des applications~~ suppl. transitif de l'égalisation entre les composés $\psi_j \circ \varphi_j$ (I considéré comme cat. discrète...), et R est-il λ-engendré par la réunion des images des ψ_j ?

Cas [illegible] conséquence du problème 5.?. Soit $S \subset \mathrm{Ob}\,R$, $R \in \mathrm{Ob}\,C_\lambda$, supposons que $\forall R' \in \mathrm{Ob}\,C_\lambda$, et $F, G \in \mathrm{Hom}_\lambda(R, R')$, $\mathrm{Hom}(F, G) \to \prod_{s \in S} \mathrm{Hom}(F(s), G(s))$ est injectif. Alors R est-il λ-engendré par S ? (Ce serait [illegible] évidemment vrai...)

101

⑥

5.6. Partons de $R \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$, avec $I \subset \mathrm{Ob}\,R$ tels que R soit λ-engendrée par I. Considérons la cat. 2-cofibrée T sur (Cat_λ) définie par R, et son application $T \to \mathcal{C}^I$ déduite de φ. Prouver que (T, φ) est un λ-I-type ? (C'est faux peut-être — renforcer la notion de sous-catégorie λ-engendrée, en tenant compte des flèches, pas seulement des objets...?))

5.7. Si on laisse tomber I, on ~~demande~~ se demande quelles catégories 2-cofibrées T sur (Cat_λ) sont un λ-type, n'étant un λ-I-type pour I et $\varphi : T \to \mathcal{C}^I$ convenables. Ce qui signifie donc (on a ce qui précède généralement) que T est 2-représentable par un $R \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}_\lambda)$, où $\mathrm{Ob}\,R$ admet une petite partie qui soit λ-génératrice (en un sens convenable à dégager).

$\boxed{6}$ λ-variable : en donnant (pour $\lambda \subset \lambda'$) des 2-foncteurs

(C1) $\quad (\lambda\text{-types}) \xrightarrow{\ \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'}\ } (\lambda'\text{-types})$

$\big(\tilde{\eta}_{\lambda,\lambda'}(T_\lambda)(C) = T_\lambda(C)$ si $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_{\lambda'}$ $(\mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda)\big)$

qui accompagnent des 2-foncteurs

(C2) $\quad (\mathrm{Cat}_\lambda) \xrightarrow{\ \eta_{\lambda\lambda'}\ } (\mathrm{Cat}_{\lambda'})$

"λ'-catégories analogues". Il faudrait donner des critères assurant lesquels (C1) est pl. fidèle.

[Ex ~~De~~ lim← finies, λ' = lim← quelc. $\quad(\tilde{\eta}(C) = \mathrm{Pro}(C)$?)

λ = lim→ finies, λ' = lim→ quelc. $\quad(\tilde{\eta}(C) = \mathrm{Ind}(C)$?)]

! || $\tilde{\eta}_{\lambda,\lambda'}$ est-il pas ~~pl.~~-fidèle, i.e. $\mathrm{Hom}_\lambda(T_1, T_2) \to \mathrm{Hom}_{\lambda'}(T_1, T_2)$ n'est-il pas une équivalence pour T_1 et T_2 deux λ-types ? Sans doute faux, mais peut-être vrai pleinement fidèle si $\lambda \supset \lambda^0$.

$\boxed{7}$ Dualité : ~~Opposé~~ d'un "type" $\lambda = (\overleftarrow{\lambda}, \overrightarrow{\lambda})$: on échange les types de diagrammes utilisés, pour des lim← vs lim→.

Alors pour un ~~λ~~-type T, on définit un λ^0-type T^0 (cf), $\quad T^0(C) \simeq T(C^0)^0$

102

(7)

i.e. on a une équivalence de cat. 2-catégories

(7.1) $T_\lambda^\circ \cong (T_\lambda)^\circ$ (...)

(7.2) On trouve ainsi une 2-équivalence

(7.3) $(\lambda\text{-types}) \xrightarrow{\approx} (\lambda^\circ\text{-types})$

(et kif kif avec I

(7.4.) $(\lambda - I\text{-types}) \xrightarrow{\approx} (\lambda^\circ - I\text{-types})$)

compatible, via les cat. représentatives, à

(7.5) $(Cat_\lambda) \xrightarrow{\approx} (Cat_{\lambda^\circ})$

$C \longmapsto C^\circ$

$\boxed{8}$ Cas où $\lambda = \emptyset$ (structures définies via $\overleftarrow{\lim}$)

T désignera une λ-structure.

8.1. Pour tout $C \in Ob\, Cat_\lambda$, les ~~limites~~ $\overleftarrow{\lim}$ de type λ existent dans $T(C)$. Plus ~~précisément~~, ~~les~~ ~~limites~~ les $\overleftarrow{\lim}$ dont type d qui existent dans C existent aussi dans $T(C)$. [Écrire $T(C) \cong \underrightarrow{Hom}_\lambda(R_T, C)$ et noter que ~~...~~ l'hyp. sur C implique que $\underrightarrow{Hom}(R_T, C)$ se calculent ~~...~~ argument par argument ~~est stable~~ a des $\overleftarrow{\lim}$ de types d, et que ~~...~~ $\underrightarrow{Hom}(R_T, C)$ est $\underrightarrow{Hom}$ est stable par lesdites $\overleftarrow{\lim}$]. De plus, pour tout $\xi \in R_T$, $\varepsilon_\xi r_C : T(C) \to C$ commute aux $\overleftarrow{\lim}$ de type d.

8.1.1. Plus généralement (λ quelconque, sans néc. $\overrightarrow{\lambda} = \emptyset$)

Si $C \in Ob\, Cat\, C_\lambda$ et si ~~...~~ d est un type de diagrammes tel que

a) C admet des $\overleftarrow{\lim}$ de type d (p.ex. $d \in \overleftarrow{\lambda}$)

b) dans C, les $\overleftarrow{\lim}$ de type d commutent aux $\overrightarrow{\lim}$ de type $\in \overrightarrow{\lambda}$

Alors ~~...~~ $T(C)$ admet des $\overleftarrow{\lim}$ de type d, et ~~...~~ ~~...~~ écrivant $T(C) \simeq \underrightarrow{Hom}(R_T^\lambda, C)$ ces limites se calculent "argument par argument"; toute ~~...~~ ...ion $\int$ val. à T, le foncteur

$\rho : T(C) \to C$

De plus si $C' \to C$ ... $T(C) \to T(C')$ ... $\overleftarrow{\lim}$ ... kif-kif ... correspondantes commutant aux flèches de type ∂. Bien sûr, on a une chance dans tous les flèches

et un λ-type Σ,

8.2. Notons que pour Σ quelconque, il est vrai que pour tout λ-foncteur dans Cat_λ $C \to C'$ [pl. fid. (fid.)] les foncteurs

(8.2.1) $i : C \to C'$

(8.2.2) $T(i) : T(C) \to T(C')$ ("base")

est pl. fidèle (fid.) si T est muni de $\Phi : T \to E^I$ fidèle, i.e. $R = R^\lambda_I$ qui 2-représente T est muni de $\varphi : I \to \mathrm{Ob}\, R_\Sigma$, alors ~~le carré~~ dans le cas pl. fidèle

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \to & T(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^I & \hookrightarrow & C'^I \end{array} \qquad (8.2.3)$$

est 2-cartésien [cela signifie aussi, en termes de R, que la $\mathcal{U}$-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R, C)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R, C')$ ~~est formée des~~ ~~identifie~~ foncteurs $R \xrightarrow{\xi} C'$ tels que $\xi(\varphi(i)) \in C$ pour tout $i \in I$: en plus, comme I engendre R, il s'ensuit que ξ (qui commute aux lim de type λ) envoie R dans l'image essentielle de C.] En termes imagés, si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets de C, "il revient au même" de se donner Appliquant ceci, pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$, au plongement canonique

(8.2.4) $i : C \hookrightarrow \hat{C}$ qui est un λ-foncteur si $\lambda = (\lambda, \emptyset)$;

on trouve que ~~pour~~ le foncteur

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \to & T(\hat{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^I & \to & \hat{C}^I \end{array} \quad \text{(2-cartésien)} \quad \text{(On suppose } \lambda = \emptyset\text{)}$$

[On s'impose ici] $\hat{C}$ est ~~est~~ $\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}$ i.e. que $\hat{C}$ est ~~une $\mathcal{U}$-catégorie~~ une $\mathcal{U}$-catégorie (vrai ~~prendre~~ si C est $\mathcal{U}$-petite) ~~Dans $T(C)$~~ ~~on a pour tout~~ $X \in C$ considérons le foncteur contravariant canonique de $\hat{C}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\hat{C}, (\mathrm{Ens}))$, restriction à C ~~de~~ moyennant i est un foncteur canonique $C^\circ \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(\hat{C}, (\mathrm{Ens}))$, et qui s'en va en fait dans la $\mathcal{U}$-catégorie pleine des foncteurs qui commutent à tout type "petit" de lim (ind ou proj), donc en particulier

(8.2.6) $C^\circ \to \underline{\mathrm{Hom}}(\hat{C}, (\mathrm{Ens}))$ $X \mapsto (F \mapsto F(X))$

D'où
$$\underline{\mathrm{Hom}}(\hat{C}, (\mathrm{Ens})) \to \underline{\mathrm{Hom}}(T(\hat{C}), T(\mathrm{Ens}))$$

(revoir de)

dessous ceux foncteurs de T de T' de type T ... C_i, pour les pris universels ...

NB L'hypothèse $\hat{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie n'est pas essentielle pour la représentabilité (8.2.5) on pour tout λ-catégorie C (par ex $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$), en fait, car $T(C)$ ... à ... pour les ... à équivalence près ... $T(\hat{C})$ ... ... de l'"calculs"

... on tout des univers λ quelc.

104

d'où en composant avec (8.2.6) un foncteur canonique

(8.2.7) $$C^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(T(\hat{C}), T(\mathrm{Ens}))$$

qui, de façon équivalente, un foncteur canonique

(8.2.8) $$T(\hat{C}) \xrightarrow{\alpha \approx} \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, S_T) \quad \text{où} \quad S_T = T(\mathrm{Ens})$$

Si on a un ensemble d'indices de base pour T, on aura un carré commutatif

(8.2.9) $$\begin{array}{ccc} T(\hat{C}) & \xrightarrow{\alpha \approx} & \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, S_T) \\ b_{\hat{C}} \downarrow & & \downarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, b_{\mathrm{Ens}}) \\ \hat{C}^I & \approx & \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, (\mathrm{Ens}))^I \end{array}$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R, \hat{C}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(R \times C^\circ, (\mathrm{Ens}))$
$\approx \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(\cancel{R}\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\lambda - R}(R, (\mathrm{Ens})))$ (8.2.8)

le foncteur α est ~~un~~ types ... équivalence, donc si $\lambda = \emptyset$ ~~le~~ carré 2-cartésien ... équivalent à

(8.2.10) $$\begin{array}{ccc} T(C) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, S_T) \\ \downarrow b_C & & \downarrow \varphi \mapsto (b_{i\,\mathrm{Ens}} \circ \varphi)_{i \in I} \\ C^I & \longrightarrow & \hat{C}^I \end{array}$$

(2 cartésien ... ($\lambda = \emptyset$) ... ~~stringent~~)

$\lambda = \emptyset$

Dit en termes imagés : la donnée, pour $(E_i) \in C^I$, d'une structure d'espèce T dans C revient à la donnée, ~~pour chaque~~ ... kif-kif dans $\hat{C}$ i.e. à la donnée pour tout $Z \in \mathrm{Ob}\, C$ d'une structure d'espèce T sur la ~~parenthèse~~ famille $(E_i(Z))_{i \in Z} = (\mathrm{Hom}(Z, E_i))_{i \in I}$ variant fonctoriellement avec Z.

Lorsque α est ~~une~~ ~~équivalence~~ équivalence alors on voit donc que la cat ~~structures~~ $T(C)$ est connue (à équivalence près (...)) (pour C tel que $\hat{C}$ une T-catégorie) lorsque l'on connaît

(8.2.11) $$\begin{cases} S = S_T = T(\mathrm{Ens}), & \text{avec les foncteurs} \\ \beta_i : S_T \longrightarrow (\mathrm{Ens}) & \beta = b_{i\,\mathrm{Ens}} \end{cases}$$

comme la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(C^\circ, S_T)$ formée des $\varphi : C^\circ \to S_T$ telles que les $\beta_i \cdot S_T$ soient représentables.

8.2.12. Si on veut une cas. intrinsèque, on peut dire aussi que c'est la sous-catégorie pleine des $\varphi : C^\circ \to S_T$ telles que $\beta_{\mathrm{Ens}} \circ \varphi$ représentable pour $\beta \in R_T^\lambda$. Notons que le foncteur

(8.2.13) $$\beta \longmapsto \beta_{\mathrm{Ens}} \quad : R = R_T^\lambda \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underset{S_T}{\underset{\|}{S_T}}, (\mathrm{Ens})) = \hat{S}^\circ \quad (4.b.5)$$

est aussi le foncteur évident

(8.2.14) $$R \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R, \mathrm{Ens}), (\mathrm{Ens}))$$

Or, si on considère $S = \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(R, (\mathrm{Ens}))$ comme sous-catégorie pleine de $\widehat{R^\circ}$, celle-ci contient R° (identifié à la cat. des foncteurs représentables de R dans (Ens)) donc ... ~~$\widehat{R^\circ}$~~ $\widehat{R^\circ}$

105

(10)

(8.2.15) $$R^\circ \subset \mathcal{S} \subset \widehat{R^\circ}$$

et le foncteur
$$\Pi : R \times S \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$
est donné par

(8.2.16) $$\pi(c,\xi) = \xi(c) = \mathrm{Hom}_{\widehat{R^\circ}}(c,\xi) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(c,\xi)$$

i.e. correspond au foncteur (8.2.17) est induit par le ~~foncteur~~ composé des deux foncteurs pleinement fidèles

(8.2.17) $$R^\circ \hookrightarrow S^\circ \hookrightarrow \widehat{S^\circ} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{S}, (\mathrm{Ens}))$$ (où ... (8.2.15))

donc est pl. fidèle. Ainsi R est connu quand on connait son image dans $\widehat{S^\circ}$.

Pour résumer, si T est un λ-type ($\lambda = \rho$), alors $\mathcal{S} = T(\mathrm{Ens})$ est muni d'une sous-catégorie pleine $\Sigma \subset \mathcal{S}$, formée des $\varphi \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ tels que pour tout $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$ et tout $\xi \in C_\lambda$, définissant un foncteur
$$\tilde\xi : C^\circ \longrightarrow \mathcal{S} \qquad X \longmapsto \mathrm{Hom}(X,\xi)$$
le foncteur composé avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\varphi, -)$ soit représentable:
$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\varphi, \mathrm{Hom}(X,\xi))$$

Σ est stable dans $\mathcal{S}$ par $\varinjlim$ (inductives) de type λ [car C est stable dans $\hat{C}$ par $\varinjlim$ de type λ, $\forall C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}_\lambda$] et pour tout C comme dessus, on a des foncteurs (λ-foncteurs)
$$\Sigma^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(T(C), C), \quad T(C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_\lambda(\Sigma; C)$$

On voit alors que l'on trouve ainsi une

106

107

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ess. petite avec $\varprojlim$ finies

T l'espèce de structure par C définie

$\hat{\mathcal{C}} = B_T = B$ le topos classifiant, $\mathcal{O}_B$ la structure universelle dans B (s'identifiant à l'inclusion $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$)

E un topos

$\mathcal{O}_E \in \mathrm{Ob}\, T(E) \simeq \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sex}}(\mathcal{C}, E) \ni f_0$

$\Updownarrow$

$f : E \longrightarrow B_T$ le morphisme correspondant

~~$\frac{E}{f}$ la structure~~ donc

$$\mathcal{O}_E \simeq f_T^*(\mathcal{O}_B) \qquad f_0 = f^* | \mathcal{C}$$

$\mathcal{U} \in \mathrm{Ob}\, E$, $X \in \mathrm{Ob}\, B$ (p. ex. $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$), on en définit une ~~bijection~~ bijectivation

$$(1) \quad \mathrm{Hom}_E(\mathcal{U}, f^* X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathrm{Ens}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_0)}(\mathcal{O}_B(X), \mathcal{O}_E(\mathcal{U}))$$

où $\mathcal{O}_E(\mathcal{U}) \in T(\mathrm{Ens})$ est l'image de $\mathcal{O}_E \in T(E)$ par le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(\mathcal{U}, Z) : E \to (\mathrm{Ens})$ qui commute aux $\varprojlim$) et où on définit de $\equiv$ $\mathcal{O}_B(X)$ dans $\hat{\mathcal{C}}$. En effet, on a

$$\mathrm{Hom}_E(\mathcal{U}, f^*(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathrm{Ens})}(\mathcal{O}_E(f^*(X)), \mathcal{O}_E(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathrm{Ens})}(\mathcal{O}_B(X), \mathcal{O}_E(\mathcal{U}))$$

car on a un morphisme de $T(\mathrm{Ens})$

$$\mathcal{O}_B(X) \longrightarrow \mathcal{O}_E(f^*(X))$$

$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}} \xrightarrow{h_X} (\mathrm{Ens})$ $\quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, Y)$

$\xrightarrow{f_0} E \xrightarrow{h_{f^*(X)}}$ $\quad Y \longmapsto \mathrm{Hom}_E(f^*(X), f^*(Y))$

108

Prouvons que si $X \in \mathrm{Ob}\, C$, l'application précédente est une bijection. D'ailleurs, les 2 membres s'expriment comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C^\circ)}(X^\circ, O_E(U)))$ pour U fixé, la catégorie des couples (X°, ξ) ($\xi \in \mathrm{Hom}(X^\circ, O_E(U))$) est la catégorie d'indices naturelle définissant $O_E(U)$ comme Ind-objet de $\mathrm{Ind}(C^\circ)$ ....

$O_B(X) : C \to (\mathrm{Ens}) \qquad Y \longmapsto \mathrm{Hom}_C(X,Y) = \mathrm{Hom}_{C^\circ}(Y,X)$

$O_E(U) : \qquad Y \longmapsto \mathrm{Hom}_E(U, f_0(Y))$

$$\mathrm{Hom}(O_B(X), O_E(U)) = O_E(U)(X) = \mathrm{Hom}_E(U, f_0(X))$$

On va en profiter pour calculer $f^*(F)$, où F est un champ sur B. Je remarque que se donner la restriction de F à C revient à se donner une catégorie fibrée sur C, définition C, i.e. se donner une catégorie fibrée sur C. Si B' est un sous-topos de $B = \hat{C}$, correspondant à une topologie τ sur C, et à une sous-espèce de structure T' de T, alors si on suppose que O_E est de cette espèce i.e. que f se factorise par B' i.e. que f_0 est continue pour τ, alors la donnée d'un champ F' sur B' revient à la donnée d'un champ F'_0 sur B muni de τ, et notre calcul nous donnera $f'^*(F')$ en termes de f_0 et F').

On ~~trouve~~ commence par noter que ~~la catégorie fibrée~~ ~~sur~~ E F_0 se prolonge en catégorie fibrée sur $\mathrm{Pro}(C) \simeq T(\mathrm{Ens})^\circ$, dénoté $\overline{F}_0$, donc $\overline{F}_0(O_E(U))$ est défini [mais covariant en l'objet $(\ ) \in T(\mathrm{Ens})$]. Pour U variable, $U \mapsto \overline{F}_0(O_E(U))$ donne donc une catégorie fibrée sur U [image inverse de $\overline{F}_0$ par $O_E : E^\circ \to T(\mathrm{Ens}) \simeq \mathrm{Pro}(C)^\circ$]. On prend le ~~catégorie~~ champ associé.

109

110

Topos modulaire pour des structures algébriques sur des objets variables d'un topos fixé X

On peut se donner des objets $E_i \in X$, $i \in I$, et ~~[illegible]~~ une espèce de structure $/I$ avec topos modulaire $\mathcal{B}$, ~~sur objets~~ avec donnée "objets de base" correspondants : des $b_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$.

On s'intéresse alors, pour un topos X' sur X, (appelons encore E_i' les images inverses des E_i) aux structures d'espèce T dans X' ~~que~~ (i.e. morphismes $f : X' \to \mathcal{B}$) ~~telles que~~ avec isos donnés $f^*(b_i) \simeq E_i'$. La catégorie de ces objets sur un topos X' fixé, pour $X' \to X$ et $X' \to \mathcal{B}$ variables, est le produit 2-fibré de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}(X', X)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}(X', \mathcal{B})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}(X', \mathcal{B}_I)$.

$$\mathcal{B} \xrightarrow{b} (\mathrm{Ens}_f)^{\circ I} = \mathcal{B}_I \xleftarrow{E} X$$

Donc on demande un produit 2-fibré $\mathcal{B} \times_{\mathcal{B}_I} X$ dans la catégorie (Top). (On n'a pas encore vérifié que cela marche!) ~~Cela doit dans [illegible] [illegible] topos~~

Supposons qu'il s'agisse ~~[illegible]~~ d'une structure définie par lim proj, avec cat. modulaire R (donc $\mathcal{B} = \widehat{R}$?, $I \hookrightarrow \mathrm{Ob}\, R$). Donc on s'intéresse aux foncteurs exacts à g. $R \to X'$ transformant les r_i en les E_i'.

Soit $\mathcal{S}$ ~~la catégorie~~ le champ sur X formé des structures et les fonctions induites, de ce type dans $(X, (E_i))$, i.e. ~~des~~ foncteurs ex. à g. $f : R \to X$ avec $f(b_i) \simeq E_i$ donnés, et ~~soit~~ soit Φ_X le champ ~~[illegible]~~ fibré (en topos) fibré de $\mathcal{B}$.

champ en cat. adoucis (annoncé en faisc. en cat. adoucis?)